Derivativos
Notas de Aula - 01

Paulo C. Coimbra-Lisboa*
EPGE/FGV†

23 de Agosto de 2005

1 Ausência de Arbitragens e o Apreçamento de Opções

Se uma carteira possuir payoffs futuros que são não positivos (não negativos) então seu payoff inicial deve ser positivo (negativo), i.e., para que não haja oportunidades de arbitragens em algum período, deve existir um custo de se montar uma determinada carteira. No caso onde os payoffs futuros são nulos então o seu custo no período inicial deve ser idêntico a zero.

Ao longo desta seção estaremos utilizando a hipótese de que a existe uma taxa de juros livre de risco, r, que apreça os títulos e que é continuamente composta, de modo que o valor presente de um ativo livre de risco que paga X na data T é dado por Xe^{-rT}.

Proposição 1 *Considere uma opção de compra sobre uma ação que pode ou não pagar dividendos antes da data de vencimento da opção, T. Então o valor de uma opção de compra (que será denotado por c) é sempre inferior ao preço spot da ação hoje (que será denotado por S_0):*

$$c \leq S_0$$

Proof. Consideremos a seguinte estratégia:
Em $t = 0$:
Vende-se uma opção de compra;
Compra-se uma ação.
Em $t = T$:
A opção é exercida se for lucrativo;
Tal estratégia irá produzir o seguinte fluxo de caixa:

	t=0	t=T	
Operação		$S_T < K$	$S_T \geq K$
Venda da opção de compra	c	0	$-(S_T - K)$
Compra-se uma ação	$-S_0$	S_T	S_T
Total	$c - S_0$	$S_T > 0$	$K > 0$

onde: K é o preço de exercício da opção de compra.
Logo, a estratégia montada irá gerar um payoff positivo no futuro. Então, para não existir oportunidades de arbitragem, tal estratégia deve possuir um fluxo de caixa inicial não positivo; portanto,

$$c \leq S_0$$

■

*Aluno do Programa de Doutoramento em Economia - EPGE/FGV; Monitor da Disciplina "Derivativos", Ministrada pelo Prof. Marcelo Fernandes. E-mail: pc.coimbra@gmail.com. URL: http://www2.fgv.br/aluno/coimbra/

†Escola de Pós Graduação em Economia da Fundação Getulio Vargas, Praia de Botafogo, n^{o}184 a192, 11^o andar. CEP: 22.250-900. Rio de Janeiro, Brasil.

Proposição 2 *Considere uma opção de compra sobre uma ação que não irá pagar dividendos antes da data de vencimento da opção, T. Então o menor valor de uma opção de compra é dado por:*

$$c \geq \max\{0, S_0 - Ke^{-rT}\}$$

Proof. Consideremos a seguinte estratégia:
Em $t = 0$:
Compra-se uma ação;
Toma-se emprestado o valor presente do preço de exercício da opção;
Vende-se uma opção de compra.
Em $t = T$:
A opção é exercida se for lucrativo;
Paga-se o montante K, referente ao empréstimo do VP de K.
Tal estratégia irá produzir o seguinte fluxo de caixa:

	t=0	t=T	
Operação		$S_T < K$	$S_T \geq K$
Compra da ação	$-S_0$	S_T	S_T
Empréstimo do VP de K	$K\ e^{-rT}$	$-K$	$-K$
Venda da opção de compra	c	0	$-(S_T - K)$
Total	$-S_0 + K\ e^{-rT} + c$	$S_T - K \leq 0$	0

Pode-se, então, notar que em $t = T$ o fluxo de caixa resultante desta operação ou é negativo (se a opção de compra não for exercida) ou nulo (se a opção de compra for exercida). Logo, a estratégia montada irá gerar um payoff não positivo no futuro. Então, para não existir oportunidades de arbitragem, tal estratégia deve possuir um fluxo de caixa inicial positivo; portanto,

$$-S_0 + Ke^{-rT} + c > 0 \text{ ou } c > S_0 - Ke^{-rT}$$

Finalmente, lembremos que em nenhum caso é possível que o valor de uma opção de compra seja menor do que zero. Logo, devemos ter que:

$$c \geq \max\{0, S_0 - Ke^{-rT}\}$$

■

Exercise 1 *Mostre que se o valor de uma ação for nula então o valor de qualquer opção de compra sobre esta ação também deve ser nulo.*

R.: Como $S_0 = 0$ segue, da proposição 1, que $c \leq 0$; por outro lado, da proposição 2 segue que $c \geq 0$. Logo $c = 0$.

Uma consequência da proposição 2 é que em muitos casos não vale à pena exercer a opção de compra americana antes da data de vencimento T, o que implica que nós podemos avaliá-la como uma opção européia. Um caso de particular interesse é apresentado na seguinte proposição:

Proposição 3 *Considere uma opção de compra americana sobre uma ação que não irá pagar dividendos antes da data de vencimento da opção T. Então nunca é ótimo exercer a opção antes do seu vencimento.*

Proof. Suponha que o detentor da opção de compra esteja considerando a possibilidade de exercê-la antes de seu vencimento, em alguma data $t < T$. A única razão para se considerar tal exercício prematuro é que $S_T - K > 0$, onde S_T é o preço à vista da ação no tempo t. Entretanto, pela proposição anterior o valor de mercado da opção no tempo t é pelo menos $S_T - Ke^{-r(T-t)}$, onde r é a taxa de juros livre de risco. Dado que $S_T - Ke^{-r(T-t)} > S_T - K$, segue-se que o detentor da opção estará melhor vendendo a opção do que exercendo-a. ■

Desse modo, de acordo com esta proposição, muitas opções de compra americanas podem ser precificadas como se fossem opções de compra européias.

Proposição 4 *Considere uma opção de compra sobre uma ação que paga dividendos (considere D como sendo o valor presente do fluxo de dividendos pago) antes na data de vencimento T. Então o menor valor da opção de compra é dado por:*

$$c \geq \max\{0, S_0 - D - Ke^{-rT}\}$$

Proof. A prova desta proposição é muito similar à prova da proposição 1.

	t=0	t=T	
Operação		$S_T < K$	$S_T \geq K$
Compra da ação	$-S_0$	$S_T + D$	$S_T + D$
Empréstimo do VP de D	D	$-D$	$-D$
Empréstimo do VP de K	$K\ e^{-rT}$	$-K$	$-K$
Venda da opção de compra	c	0	$-(S_T - K)$
Total	$-S_0 + D + K\ e^{-rT} + c$	$S_T - K \leq 0$	0

■

Proposição 5 *Considere uma opção de compra americana sobre uma ação que irá pagar dividendos até a data de vencimento T. Então o valor da opção de compra americana (que denotaremos por C) é dado por:*

$$C \geq \max\{0, S_0 - K, S_0 - D - K\ e^{-rT}\}$$

Proof. Notemos, inicialmente, que não podemos ter que $C < S_0 - K$ pois, de outro modo, bastaria comprar a opção de compra americana e exercê-la imediatamente por K.

Como o valor de uma opção de compra americana é sempre maior do que o de uma européia equivalente, segue-se o resultado, utilizando a proposição 4. ■

Exercise 2 *Mostre que se o preço de exercício de uma opção de compra for nulo então o valor da opção de compra americana ou européia sobre a ação que não paga dividendos será igual ao valor da ação.*

R.: Das proposições 2 e 4 vem que $c \geq S_0$, enquanto que da proposição 1 temos que $c \leq S_0$.
Logo, $c = S_0$.

Exercise 3 *Mostre que o valor de uma opção de compra decresce com o preço de exercício.*

R.: Seja $c(K)$ o preço de uma opção de compra como função dos preços de exercício. Suponha que K_1 e K_2 são os preços de exercício de duas opções de compra sobre uma mesmo ativo com o mesmo vencimento, tais que $K_1 < K_2$. Se, além disso, $c(K_1) < c(K_2)$, então pode-se vender a segunda opção por $c(K_2)$ e comprar a primeira por $c(K_1)$, realizando um lucro de $c(K_2) - c(K_1) > 0$.

Se o detentor da opção de compra vendida exercer a sua opção em um dado instante, basta exercer a opção comprada ao mesmo tempo, entregando-lhe o ativo subjacente assim obtido e realizando um ganho positivo $K_2 - K_1 > 0$. Caso contrário pode-se manter a opção comprada em mãos até a maturidade, realizando um ganho adicional sempre positivo, o que, mais uma vez, contituiria uma possibilidade de arbitragem, contrariando a hipótese.

Logo, se $K_1 < K_2$ então $c(K_1) \geq c(K_2)$.

Proposição 6 ***Relação de Paridade entre Opções de Compra e Opções de Venda***

Considere uma ação que não irá pagar dividendos antes da data T. Suponha que existam duas opções do tipo europeu sobre esta ação, uma de compra (com preço c) e outra de venda (com preço p), ambas com a mesma data de vencimento T, e o mesmo preço de exercício, K. Então:

$$c + K\ e^{-rT} - p - S_0 = 0$$

Proof. Consideremos uma carteira composta de quatro ativos: um título, uma ação, uma opção de compra sobre esta ação e uma opção de venda sobre esta ação.

	t=0	t=T	
Operação		$S_T < K$	$S_T \geq K$
Compra de uma opção de compra	$-c$	0	$S_T - K$
Compra de um título com payoff K em $t = T$	$-K\ e^{-rT}$	K	K
Venda de uma opção de venda	p	$-(K - S_T)$	0
Venda a descoberto de uma ação	S_0	$-S_T$	$-S_T$
Total	$-c - K\ e^{-rT} + p + S_0$	0	0

Dado que a estratégia possui payoffs futuros que são nulos, não importando o que aconteça com o preço da ação, segue-se que o fluxo de caixa inicial da estratégia deve também ser igual a zero. Portanto,

$$c + K\ e^{-rT} - p - S_0 = 0$$

■

Exercise 4 *Mostre que a relação de paridade entre opções de compra e opções de cenda no caso de uma ação que irá pagar dividendos até uma data de vencimento T é dada por:*

$$c + D + K\ e^{-rT} - p - S_0 = 0$$

R.: Omitida. Análoga à Proposição 6.

Uma nota: A relação de paridade entre opções de compra e opções de venda estabelece que o preço de uma ação S_0 , o preço de uma opção de compra c com preço de exercício K e o preço de uma opção de venda p com preço de exercício K são simultaneamente determinados com a taxa de juros r.

Proposição 7 *Considere uma opção de venda sobre uma ação que não irá pagar dividendos antes da data de vencimento T. Então o menor valor da opção de venda (que será denotado por p) é dado por:*

$$p \geq \max\{0, K\ e^{-rT} - S_0\}$$

Proof. Omitida. Análoga à da proposição 1. ■

A proposição 3 não possui a sua contraparte para o caso de opções de venda americanas.

Exercise 5 *Mostre um exemplo para o qual é ótimo exercer uma opção de venda americana antes de seu vencimento.*

R.: Suponha que o preço de exercício seja \$10 e o preço da ação seja, virtualmente, zero. Ao exercer imediatamente a opção, o investidor realiza um ganho imediato de \$10.

Se o investidor esperar, o ganho do exercício pode ser menor do que \$10, mas não pode ser maior que \$10, pois os preços das ações não podem ser negativos.

Portanto, dado que receber \$10 agora é melhor do que receber \$10 depois, segue-se que a opção deve ser exercida imediatamente.

Exercise 6 *Mostre que o menor valor de uma opção de venda sobre uma ação que irá pagar dividendos antes da data de vencimento T é dado por:*

$$p \geq \max\{0, D + K\ e^{-rT} - S_0\}$$

R.: Omitida. Análogo à Proposição 4.

Exercise 7 *Mostre que o valor de uma opção de venda americana sobre uma ação que irá pagar dividendos até a data de vencimento T satifaz:*

$$K \geq P \geq \max\{0, K - S_0, D + K\ e^{-rT} - S_0\}$$

R.: Omitida. decorre da Proposição 5 e do Exercício 4.

2 Algumas Estratégias com Opções:

A idéia básica de se combinar opções é a de tentar, simultaneamente, controlar o tipo de risco e a alavancagem dado o que se antecipa que serão os movimentos de mercado dos preços dos ativos. Eis algumas destas estratégias.

1 - **Call Bull Vertical Spread:** compra de uma opção de compra com um preço de exercício K_1 e venda de uma outra opção de compra com preço de exercício K_2 e com $K_2 > K_1$.

2 - **Call Bear Vertical Spread:** venda de uma opção de compra com um preço de exercício K_1 e compra de uma outra opção de compra com preço de exercício K_2 e com $K_2 > K_1$.

3 - **Call Butterfly Spread:** é uma combinação das estratégias anteriores e é constituída da compra de uma opção de compra com preço de exercício K_1, compra de uma outra opção de compra com preço de exercício K_3, venda de duas opções de compra com preço de exercício K_2, $K_3 > K_2 > K_1$. Tal estratégia reflete o fato de que o investidor não espera uma volatilidade no entorno do preço de exercício K_2.

4 - **Put Bull Vertical Spread:** compra de uma opção de venda com um preço de exercício K_1 e venda de uma outra opção de venda com preço de exercício K_2 e com $K_2 > K_1$.

5 - **Put Bear Vertical Spread:** venda de uma opção de venda com um preço de exercício K_1 e compra de uma outra opção de venda com preço de exercício K_2 e com $K_2 > K_1$.

6 - **Put Butterfly Spread:** é uma combinação das estratégias anteriores e é constituída da compra de uma opção de venda com preço de exercício K_1, compra de uma outra opção de venda com preço de exercício K_3, venda de duas opções de venda com preço de exercício K_2, $K_3 > K_2 > K_1$.

7 - **Botton Stradle:** consite na combinação da compra de uma opção de compra e compra de uma opção de venda, ambas com o mesmo preço de exercício.

8 - **Top Stradle:** consite na combinação da venda de uma opção de compra e venda de uma opção de venda, ambas com o mesmo preço de exercício.

9 - **Botton Vertical:** consite na combinação da compra de uma opção de compra com preço de exercício K_1 e compra de uma opção de venda com preço de exercício.K_2, com $K_2 > K_1$.

10 - **Top Vertical:** consite na combinação da venda de uma opção de compra com preço de exercício K_1 e venda de uma opção de venda com preço de exercício.K_2, com $K_2 > K_1$.

11 - **Botton Strangle:** consite na combinação da compra de uma opção de compra com preço de exercício K_1 e compra de uma opção de venda com preço de exercício.K_2, com $K_2 < K_1$.

12 - **Top Vertical:** consite na combinação da venda de uma opção de compra com preço de exercício K_1 e venda de uma opção de venda com preço de exercício.K_2, com $K_2 < K_1$.