

Os Fundamentos dos Jogos Não Cooperativos*

Paulo César Coimbra-Lisboa[†]
EPGE/FGV[‡]

Sergio Ribeiro da Costa Werlang[§]
Banco Itaú S.A.

29 de Setembro de 2006

1 Definições Preliminares

1.1 Introdução aos Jogos Não-Cooperativos

Definição 1 *Jogo*

É uma situação de escolha individual onde há interdependência. Um indivíduo imerso em um grupo tem que tomar decisões que são tais que os resultados que ele irá obter também depende das decisões que são tomadas pelos outros indivíduos.

Observação 1 *Doravante nos referimos aos indivíduos participantes de um jogo como sendo jogadores.*

Definição 2 *Conjunto de Jogadores*

Indicaremos por I o conjunto dos jogadores, que é um conjunto finito, que pode ser apresentado através de uma listagem de seus elementos:

$$I = \{1, \dots, I\}^1.$$

Nos referiremos por i como um jogador arbitrário, i.e., $i \in I$

Definição 3 *Conjunto de Estratégias Puras de um Jogador $i \in I$*

Indicaremos por S_i o conjunto das estratégias puras do i -ésimo jogador. Assim, se o jogador possuir $k_i \in \mathbb{N}$ estratégias puras, então o conjunto de estratégias do jogador i será uma listagem: $S_i = \{s_i^1, s_i^2, \dots, s_i^{k_i}\}$.²

Observação 2 *Nos referiremos por s_i^j como sendo a j -ésima estratégia do i -ésimo jogador, i.e., $s_i^j \in S_i$.*

*Versão preliminar das Notas de Aula do Curso Teoria dos Jogos, ministradas pelo Prof. Dr. Sérgio Ribeiro da Costa Werlang. O material referente ao apêndice B foi extrido da internet do site "History of Economic Thought Website" (<http://cepa.newschool.edu/het>). Os possíveis erros e omissões são de responsabilidade do monitor.

[†]Aluno do Programa de Doutorado em Economia e Monitor do Curso de Teoria dos Jogos - EPGE/FGV - pc.coimbra@gmail.com - <http://www2.fgv.br/aluno/coimbra/>.

[‡]Escola de Pós Graduação em Economia da Fundação Getúlio Vargas, Praia de Botafogo, nº184 a192, 11º andar. CEP: 22.250-900. Rio de Janeiro, Brasil.

[§]Ph. D., Princeton University, Diretor Executivo do Banco Itaú S. A. e Professor da EPGE/FGV.

¹Seguiremos a tradição na literatura e denotaremos o último elemento deste conjunto pelo mesmo símbolo do próprio conjunto.

²Ao longo destas notas consideraremos $S_i \subset \mathbb{R}^{k_i}$.

Notação 1 Combinação de Estratégias Puras

Seja S o produto cartesiano das combinações de estratégias dos jogadores:

$$S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_I.$$

Se cada jogador escolher uma estratégia pura $s_i^j \in S_i$, então denotaremos por $s = (s_1, s_2, \dots, s_I)$ a combinação de estratégias puras escolhidas por todos os jogadores, i.e.:

$$(s_1, s_2, \dots, s_I) \in S_1 \times S_2 \times \dots \times S_I, \text{ ou, simplesmente, } s \in S.$$

Uma simplificação muito útil consiste em definir o conjunto das combinações de estratégias puras de todos os outros jogadores que não um i -ésimo por:

$$S_{-i} = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots \times S_I$$

que nos permite reescrever o produto cartesiano das combinações de estratégias puras como $S \equiv S_i \times S_{-i}$.

Assim uma combinação de estratégias puras escolhidas pode ser reescrita como $s \equiv (s_i, s_{-i})$, i.e., $(s_i, s_{-i}) \in S_i \times S_{-i}$.

Definição 4 Função de Utilidade de Bernoulli do Jogador i

Uma função $u_i : S_i \times S_{-i} \rightarrow \mathfrak{R}$ que a cada combinação de estratégias puras associa um número real é chamada função de utilidade de Bernoulli do jogador $i \in I$, e será indicada por $u_i(s_i, s_{-i})$.

Note que o nível de utilidade de Bernoulli do jogador $i \in I$ depende não somente de sua estratégia pura escolhida, mas, também, da combinação de estratégias puras escolhidas pelos outros jogadores.

Definição 5 Jogo na Forma Normal

A tripla: $\Gamma = (I; \{S_i\}_{i=1}^I; \{u_i(s_i, s_{-i})\}_{i=1}^I)$

onde: I é o conjunto dos jogadores, $I = \{1, \dots, I\}$;

S_i é o conjunto de estratégias do i -ésimo jogador, $\forall i \in I$;

$u_i(s_i, s_{-i})$ é a função de utilidade de Bernoulli do i -ésimo jogador, $\forall i \in I$.
representa um jogo na forma normal.

Observação 3 Seja Γ um jogo na forma normal. Dizemos que o jogo é finito se $S_i \times S_{-i} < \infty$.

Exemplo 1 Par ou Ímpar

$$\Gamma = (\{1, 2\}; \{(s_i^1 = \text{Par}, s_i^2 = \text{Ímpar})\}_{i=1}^2, \{u_i(s_1, s_2)\}_{i=1}^2})$$

$$\text{onde: } u_1(s_1^1, s_2^1) = 1, u_1(s_1^1, s_2^2) = -1, u_1(s_1^2, s_2^1) = -1, u_1(s_1^2, s_2^2) = 1;$$

$$u_2(s_1^1, s_2^1) = -1, u_2(s_1^1, s_2^2) = 1, u_2(s_1^2, s_2^1) = 1, u_2(s_1^2, s_2^2) = -1.$$

Este jogo pode ser representado através da forma bi matricial.³

| | | | |
|---|-------|---------|---------|
| | | 2 | |
| | | Par | Ímpar |
| 1 | Par | (1, -1) | (-1, 1) |
| | Ímpar | (-1, 1) | (1, -1) |

Quando o conjunto das estratégias puras dos jogadores for um conjunto finito então podemos estar interessados em analisar situações onde os jogadores formam estratégias considerando distribuições de probabilidades sobre suas respectivas estratégias puras. Tais estratégias, assim formadas, serão chamadas de estratégias mistas.

³Doravante, quando que nos referirmos à jogos finitos com 2 jogadores (i.e., jogos onde cada um dos jogadores possui um conjunto finito de estratégias puras) utilizaremos a representação bimatricial.

Definição 6 Medida de Probabilidade (Aditiva) sobre o Conjunto das Estratégias Puras de um Jogador $i \in I$

Seja S_i um conjunto finito de estratégias puras do jogador i .

Uma função $\sigma_i : 2^{S_i} \rightarrow [0, 1]$ é chamada medida de probabilidade (aditiva) sobre S_i se ela satisfizer as seguintes propriedades:

- i) $\sigma_i(\emptyset) = 0$;
- ii) $\sigma_i(S_i) = 1$;
- iii) Para todo $A, B \in 2^{S_i}$, com $A \cap B = \emptyset$: $\sigma_i(A \cup B) = \sigma_i(A) + \sigma_i(B)$.

Definição 7 Simplexo Unitário Linear

Suponha que o i -ésimo jogador possua $k_i \in \mathbb{N}$ estratégias puras em S_i .

O simplexo unitário linear é o conjunto de medidas de probabilidades (aditivas) sobre S_i , e será denotado por $\Delta(S_i)$, definido do seguinte modo:

$$\Delta(S_i) = \{(\sigma_i^1, \sigma_i^2, \dots, \sigma_i^{k_i}) \in \mathbb{R}_+^{k_i}; \sum_{j=1}^{k_i} \sigma_i^j = 1\}$$

Observação 4 $\Delta(S_i) \in \mathbb{R}_+^{k_i-1}$.

Definição 8 Estratégia Mista de um Jogador $i \in I$

Estratégia mista de um i -ésimo jogador é uma medida de probabilidade (aditiva) sobre seu respectivo conjunto de estratégias puras, i.e., $\sigma_i \in \Delta(S_i)$.

Definição 9 Conjunto de Estratégias Mistadas do Jogador $i \in I$

Indicaremos por $\Delta(S_i)$ o conjunto das estratégias mistadas do i -ésimo jogador. Assim, se o jogador possuir k_i estratégias puras, então o conjunto de estratégias mistadas do jogador i será uma listagem:

$$\sigma_i = (\sigma_i^1, \sigma_i^2, \dots, \sigma_i^{k_i})$$

onde σ_i^j é a probabilidade que o i -ésimo jogador atribui à escolha da j -ésima estratégia pura.

Notação 2 Combinação de Estratégias Mistadas

Seja $\Delta(S)$ o produto cartesiano das combinações de estratégias mistadas dos jogadores:

$$\Delta(S) = \Delta(S_1) \times \Delta(S_2) \times \dots \times \Delta(S_I).$$

Se cada jogador escolher uma estratégia mista $\sigma_i \in \Delta(S_i)$, então denotaremos por $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_I)$ a combinação de estratégias mistadas escolhidas por todos os jogadores, i.e.:

$$(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_I) \in \Delta(S_1) \times \Delta(S_2) \times \dots \times \Delta(S_I), \text{ ou, simplesmente, } \sigma \in \Delta(S).$$

Uma simplificação muito útil consiste em definir o conjunto das combinações de estratégias mistadas de todos os outros jogadores que não um i -ésimo por:

$$\Delta(S_{-i}) \equiv \Delta(S_1) \times \Delta(S_2) \times \dots \times \Delta(S_{i-1}) \times \Delta(S_{i+1}) \times \dots \times \Delta(S_I)$$

que nos permite reescrever o produto cartesiano das combinações de estratégias mistadas como $\Delta(S) \equiv \Delta(S_i) \times \Delta(S_{-i})$.

Assim uma combinação de estratégias mistadas escolhidas pode ser reescrita como $\sigma \equiv (\sigma_i, \sigma_{-i})$, i.e., $(\sigma_i, \sigma_{-i}) \in \Delta(S_i) \times \Delta(S_{-i})$.

Observação 5 Se as estratégias mistadas são permitidas então a escolha individual deixa de ocorrer em um ambiente com certeza e passa a ocorrer em um ambiente com risco. A axiomatização das escolha individual sob risco foi feita por von Neumann e Morgenstern [1944].

Definição 10 Função de Utilidade Esperada de von Neumann-Morgenstern do Jogador $i \in I$

Uma função $U_i : \Delta(S_i) \times \Delta(S_{-i}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada combinação de estratégias mistas escolhida pelos jogadores e uma função de utilidade de Bernoulli associa um número real é chamada de função de utilidade esperada de von Neumann-Morgenstern do jogador $i \in I$, e será indicada por $U_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$ e é definida como se segue:

$$U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{(s_i, s_{-i}) \in S_i \times S_{-i}} \sigma_i(s_i) \sigma_{-i}(s_{-i}) u_i(s_i, s_{-i})$$

Onde: $\sigma_i(s_i)$ é a probabilidade que o i -ésimo jogador atribui à escolha da estratégia pura $s_i \in S_i$.

Observação 6 Note que o nível de utilidade do jogador $i \in I$ depende não somente de sua escolha, como também da combinação das estratégias escolhidas pelos outros jogadores.

Definição 11 Jogo na Forma Normal Modificado (com Estratégias Mistas)

A tripla: $\Gamma' = (I; \{\Delta(S_i)\}_{i=1}^I; \{U_i(\sigma_i, \sigma_{-i})\}_{i=1}^I)$

onde: I é o conjunto dos jogadores, $I = \{1, \dots, I\}$;

$\Delta(S_i)$ é o conjunto de estratégias mistas do i -ésimo jogador ($i \in I$);

$U_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$ é a função de utilidade esperada de von Neumann-Morgenstern do i -ésimo jogador ($i \in I$).
representa o jogo na forma normal modificado (com estratégias mistas).

Exemplo 2 Jogo de Par ou Ímpar com Estratégias Mistas

$$\Gamma' = (\{1, 2\}; \{(\sigma_i^{Par}, \sigma_i^{Ímpar}) \in \mathbb{R}_+^2; \sigma_i^{Par} + \sigma_i^{Ímpar} = 1\}_{i=1}^2, \{U_i(\sigma_1, \sigma_2)\}_{i=1}^2\}$$

Para quaisquer $(\sigma_1, \sigma_2) \in \Delta(S_i) \times \Delta(S_{-i})$ as utilidades esperadas dos jogadores são definidas do seguinte modo:

$$U_i(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1^{Par} \sigma_2^{Par} u_i(s_1^1, s_2^1) + \sigma_1^{Par} \sigma_2^{Ímpar} u_i(s_1^1, s_2^2) + \sigma_1^{Ímpar} \sigma_2^{Par} u_i(s_1^2, s_2^1) + \sigma_1^{Ímpar} \sigma_2^{Ímpar} u_i(s_1^2, s_2^2)$$

Substituindo as utilidades dos jogadores alcançadas para cada combinação de estratégias puras, teremos:

$$U_1(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1^{Par} \sigma_2^{Par} (1) + \sigma_1^{Par} \sigma_2^{Ímpar} (-1) + \sigma_1^{Ímpar} \sigma_2^{Par} (-1) + \sigma_1^{Ímpar} \sigma_2^{Ímpar} (1); e$$

$$U_2(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1^{Par} \sigma_2^{Par} (-1) + \sigma_1^{Par} \sigma_2^{Ímpar} (1) + \sigma_1^{Ímpar} \sigma_2^{Par} (1) + \sigma_1^{Ímpar} \sigma_2^{Ímpar} (-1).$$

2 A Racionalidade Individual com Interdependência e a Eliminação Iterada de Estratégias Estritamente Dominadas

Suponha que um indivíduo possua escolhas em um conjunto S , e que suas preferências possam ser representadas através de uma função de utilidade $u : S \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada escolha, $s \in S$, associa um número real, que indicaremos por $u(s)$. A racionalidade em um problema de escolha individual, se resume à escolha da alternativa mais preferível dentre todas as possíveis (i.e., aquela que dá a maior utilidade):

Definição 12 Racionalidade Individual

Se o indivíduo possui escolhas em um conjunto S , e suas preferências podem ser representadas por uma função de utilidade $u : S \rightarrow \mathbb{R}$, então dizer que ele possui uma racionalidade individual equivale à dizer que ele irá escolher $s^* \in S$, tal que:

$$u(s^*) \geq u(s), \text{ para toda } s \in S$$

De outro modo, o indivíduo irá escolher $s^* \in S$, tal que:

$$s^* = \max_{s \in S} u(s)$$

Se voltarmos ao exemplo do jogo "Par ou Ímpar", podemos observar que a aplicação do conceito de racionalidade individual não nos permite extrair qualquer conclusão a respeito da escolha de qualquer um dos jogadores.

2.1 A Racionalidade Individual com Interdependência

Apresentaremos, nesta subseção, uma breve discussão sobre o que se constitui a escolha individual em situações onde há interdependência, i.e. o que se constitui a racionalidade de um jogador em um jogo.

Definição 13 *Estratégia Estritamente Dominante*

Uma estratégia estritamente dominante para o jogador $i \in I$, em um jogo Γ , é uma estratégia $s'_i \in S_i$ tal que para quaisquer que sejam as combinações de estratégias escolhidas pelos outros jogadores, $s_{-i} \in S_{-i}$, vale que:

$$u_i(s'_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}), \text{ para toda } s_i, s'_i \neq s_i \in S_i.$$

Se, em um jogo Γ , cada um dos jogadores possuir uma estratégia estritamente dominante, então a racionalidade com interdependência reduz-se à racionalidade individual, o que nos permite prever qual será o resultado do jogo: cada jogador irá escolher a sua estratégia estritamente dominante. Isto nos remete ao seguinte:

Axioma 1 *1º Princípio de Racionalidade para Jogos:*

“Se o indivíduo $i \in I$, em um jogo Γ , vê-se diante de um problema de escolha interdependente e $s'_i \in S_i$ for uma estratégia estritamente dominante, então o jogador i escolhe s'_i .”

Definição 14 *Equilíbrio em Estratégias Estritamente Dominantes*

Seja $(s_i, s_{-i}) \in S_i \times S_{-i}$ uma combinação de estratégias em um jogo Γ .

A combinação de estratégias (s'_i, s'_{-i}) representa um equilíbrio em estratégias estritamente dominantes se, para todo $i \in I$, a estratégia $s'_i \in S_i$ for estritamente dominante.

Observação 7 Se, em um dado jogo Γ , a combinação de estratégias $(s'_i, s'_{-i}) \in S_i \times S_{-i}$ representa um equilíbrio em estratégias estritamente dominantes, então esta combinação será a solução do jogo.

Exemplo 3 *Dilema dos Prisioneiros*

| | | | |
|---|-----------|----------|-----------|
| | | 2 | |
| | | Conf. | Não Conf. |
| 1 | Conf. | (-8, -8) | (0, -10) |
| | Não Conf. | (-10, 0) | (-1, -1) |

Qualquer que seja a atitude do outro indivíduo, confessar é sempre a melhor estratégia para qualquer um dos indivíduos. Logo (Conf., Conf.) será a solução do jogo.

O seguinte exemplo mostra que nem sempre os jogadores possuem estratégias estritamente dominantes, o que implica que o conceito de equilíbrio em estratégias estritamente dominantes nem sempre permite obter a solução do jogo.

Exemplo 4 *Dilema dos Prisioneiros Ampliado I*

| | | | |
|---|---|----------|-----------|
| | | 2 | |
| | | e | d |
| 1 | a | (-8, -8) | (0, -10) |
| | b | (-10, 0) | (-1, -1) |
| | c | (-8, -8) | (-1, -10) |

Podemos observar que o jogador 2 possui uma estratégia estritamente dominante, e. Por outro lado, o jogador 1 não possui uma estratégia estritamente dominante, logo não existe um equilíbrio em estratégias estritamente dominantes.

Como acabamos de ver, o conceito de equilíbrio em estratégias estritamente dominantes é um conceito muito forte. Faremos agora uma caracterização mais ampla de conceitos de estratégias que nos permitirão alcançar um conjunto de combinações de estratégias mais restritas em um jogo, que em alguns casos pode representar a solução do jogo (quando a combinação de estratégias mais "restritas" for única).

Definição 15 *Estratégia s'_i Fracamente Dominante sobre outra Estratégia s''_i*

Uma estratégia $s'_i \in S_i$ domina fracamente uma outra estratégia $s''_i \in S_i$, para o jogador $i \in I$, em um jogo Γ , se, para quaisquer que sejam as combinações de estratégias escolhidas pelos outros jogadores, $s_{-i} \in S_{-i}$, vale que:

$$u_i(s'_i, s_{-i}) \geq u_i(s''_i, s_{-i})$$

Com desigualdade estrita para pelo menos uma combinação de estratégias $s'_{-i} \in S_{-i}$, escolhida pelos outros jogadores:

$$u_i(s'_i, s'_{-i}) > u_i(s''_i, s'_{-i})$$

Definição 16 *Estratégia Dominante*

Uma estratégia dominante para o jogador $i \in I$, em um jogo Γ , é uma estratégia $s'_i \in S_i$ tal que para quaisquer que sejam as combinações de estratégias escolhidas pelos outros jogadores, $s_{-i} \in S_{-i}$, vale que:

$$u_i(s'_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}), \text{ para toda } s_i, s'_i \neq s_i \in S_i.$$

Com desigualdade estrita para pelo menos uma combinação de estratégias $s'_{-i} \in S_{-i}$, escolhida pelos outros jogadores, i.e.:

$$u_i(s'_i, s'_{-i}) > u_i(s_i, s'_{-i})$$

De outro modo, uma estratégia dominante para o jogador $i \in I$, em um jogo Γ , é uma estratégia $s'_i \in S_i$ que é fracamente dominante sobre todas as outras estratégias $s_i, s'_i \neq s_i \in S_i$.

O exemplo a seguir mostra que nem todo jogo possui estratégias dominantes.

Exemplo 5 *Dilema dos Prisioneiros Ampliado II*

| | | | |
|---|---|----------|-----------|
| | | 2 | |
| | | e | d |
| | a | (-8, -8) | (0, -10) |
| 1 | b | (-10, 0) | (-1, -1) |
| | c | (0, -8) | (-8, -10) |

Suponha que ambos os jogadores escolham de acordo com o 1º princípio de racionalidade. Aplicado a este jogo a única coisa que podemos dizer é que o jogador 2 escolhe e (pois o jogador 1 não possui nenhuma estratégia dominante). Logo, aplicando o 1º princípio, não obteremos uma boa previsão sobre a solução do jogo.

Definição 17 *Estratégia Dominada*

Uma estratégia dominada para o jogador $i \in I$, em um jogo Γ , é uma estratégia $s''_i \in S_i$ se existir pelo menos uma outra estratégia $s'_i \in S_i$, se, para quaisquer que sejam as combinações de estratégias escolhidas pelos outros jogadores, $s_{-i} \in S_{-i}$, vale que:

$$u_i(s'_i, s_{-i}) \geq u_i(s''_i, s_{-i}),$$

com desigualdade estrita para pelo menos uma combinação de estratégias $s'_{-i} \in S_{-i}$ escolhida pelos outros jogadores:

$$u_i(s'_i, s'_{-i}) > u_i(s''_i, s'_{-i}).$$

De outro modo, uma estratégia dominada para o jogador $i \in I$, em um jogo Γ , é uma estratégia $s''_i \in S_i$ tal que existe pelo menos uma outra estratégia $s'_i, s''_i \neq s'_i \in S_i$ que é fracamente dominante sobre ela.

Observação 8 Se, um dado jogo Γ , o jogador $i \in I$ possuir uma estratégia $s'_i \in S_i$ que é estritamente dominante, então todas as outras estratégias $s''_i, s'_i \neq s''_i \in S_i$ são estratégias dominadas por ela.

Definição 18 Estratégia Estritamente Dominada

Uma estratégia estritamente dominada para o jogador $i \in I$, em um jogo Γ , é uma estratégia, $s'_i \in S_i$, se existir pelo menos uma outra estratégia $s''_i \in S_i$ tal que para quaisquer que sejam as estratégias escolhidas pelos outros jogadores, $s_{-i} \in S_{-i}$, vale que:

$$u_i(s'_i, s_{-i}) > u_i(s''_i, s_{-i}).$$

Observação 9 Se, um dado jogo Γ , o jogador $i \in I$ possuir uma estratégia $s'_i \in S_i$ que é estritamente dominante, então todas as outras estratégias $s''_i, s'_i \neq s''_i \in S_i$ são estratégias estritamente dominadas por ela.

Exemplo 6 Dilema dos Prisioneiros Ampliado II (Continuação)

Note, que, independentemente da estratégia escolhida pelo jogador 2, o jogador 1 nunca escolherá a estratégia b (pois é estritamente dominada, tanto por a quanto por c).

Os conceitos discutidos até aqui estão relacionados à jogos onde são permitidas somente escolhas de estratégias puras pelos jogadores. O exemplo a seguir mostra que se considerarmos somente escolhas de estratégias puras, pode ser que não seja possível fazer qualquer eliminação de estratégias.

Exemplo 7 Par ou Ímpar Ampliado

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} e & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{array}{cc} (1, -1) & (-1, 1) \\ (-1, 1) & (1, -1) \\ (\alpha, 0) & (\alpha, 0) \end{array} \end{array}, \alpha < 0$$

Podemos notar que nenhum dos jogadores possui uma estratégia estritamente dominada.

Redefiniremos o conceito de estratégias estritamente dominadas considerando jogos onde são permitidas as escolhas de estratégias mistas.⁴

Definição 19 Estratégia Estritamente Dominada (Estratégias Mistas)

Uma estratégia estritamente dominada para o jogador $i \in I$, em um jogo Γ' , é uma estratégia, $s'_i \in S_i$, se existir pelo menos uma outra estratégia $\sigma'_i \in \Delta(S_i)$ tal que para quaisquer que sejam as estratégias escolhidas pelos outros jogadores, $\sigma_{-i} \in \Delta(S_{-i})$, vale que:

$$u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) > u_i(s'_i, \sigma_{-i}).$$

Observação 10 Doravante, a menos que especifiquemos o contrário, sempre que estivermos procurando por estratégias estritamente dominadas estaremos considerando jogos onde são permitidas estratégias mistas.

⁴Se estivermos considerando um jogo Γ' , então o conceito de estratégias puras permanece válido.

Suponha, inicialmente, um jogo Γ em que o jogador $i \in I$ possua $k_i \in \mathbb{N}$ estratégias puras. O conjunto de estratégias puras deste jogador pode ser escrito como:

$$S_i = \{s_i^1, \dots, s_i', \dots, s_i^{k_i}\}$$

Se, por outro lado, estivermos considerando um jogo Γ' - onde são permitidas escolhas em conjuntos de estratégias mistas, $\Delta(S_i)$ -, uma estratégia mista do jogador $i \in I$ pode ser escrita como:

$$\sigma_i = (\sigma_i^1, \dots, \sigma_i', \dots, \sigma_i^{k_i}) \in \Delta(S_i)$$

Notação 3 Sempre que nos referirmos à estratégia pura $s'_i \in S_i$, do jogador $i \in I$, em um jogo Γ' , estaremos equivalentemente nos referindo à estratégia mista degenerada: $\sigma_i = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \Delta(S_i)$

onde: $\sigma_i(s'_i) = 1$ e $\sigma_i(s_i) = 0$ para todo $s_i, s'_i \neq s_i \in S_i$.

Exemplo 8 Par ou Ímpar Ampliado (Continuação)

A estratégia pura do jogador 1, $c \in S_1$ é estritamente dominada pela estratégia mista $\sigma_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \in \Delta(S_1)$ (que associa probabilidade $\frac{1}{2}$ à escolha da estratégia $a \in S_1$, probabilidade $\frac{1}{2}$ à escolha da estratégia $b \in S_1$ e probabilidade 0 à escolha da estratégia $c \in S_1$).

Axioma 2 2º Princípio de Racionalidade para Jogos:

“Se o indivíduo $i \in I$, em um jogo Γ' , vê-se diante de um problema de escolha individual em um problema de interdependência e a estratégia $s_i \in S_i$ é estritamente dominada, então s_i nunca será escolhida”.

Exemplo 9 Dilema dos Prisioneiros Modificado II (Continuação)

Aplicando o 2º princípio de racionalidade, podemos eliminar um conjunto de combinações de estratégias que não serão escolhidas (pois os jogadores não escolherão estratégias estritamente dominadas), o que já se aproxima de uma combinação de estratégias que poderiam representar o equilíbrio do jogo (uma vez que, além de saber que 2 escolhe e , sabemos também que o jogador 1 escolherá a ou c).

Exemplo 10 Par ou Ímpar Ampliado (Continuação)

Aplicando o 2º princípio de racionalidade, podemos eliminar a estratégia pura $c \in S_1$ do jogador 1. Note que, com a eliminação desta estratégia, voltamos à configuração usual do jogo Par ou Ímpar.

Proposição 1 2º Princípio de Racionalidade \Rightarrow 1º Princípio de Racionalidade

Prova. Por contraposição.

Seja um jogo na forma normal:

$$\Gamma = (I; \{S_i\}_{i=1}^I; \{u_i(s_i, s_{-i})\}_{i=1}^I)$$

onde: I é o conjunto dos jogadores, $I = \{1, \dots, I\}$;

S_i é o conjunto de estratégias do i -ésimo jogador, $\forall i \in I$;

$u_i(s_i, s_{-i})$ é a função de utilidade de Bernoulli do i -ésimo jogador, $\forall i \in I$.

Suponha que um jogador $i \in I$, em Γ , possua uma estratégia estritamente dominante, $s'_i \in S_i$ i.e., uma estratégia que é tal que, para quaisquer que sejam as combinações de estratégias escolhidas pelos outros jogadores, $s_{-i} \in S_{-i}$, vale que:

$$u_i(s'_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}), \text{ para toda } s_i (\neq s'_i) \in S_i.$$

A negação do 1º princípio de racionalidade equivale à hipótese de que s'_i não será escolhida, i.e., uma outra estratégia $s''_i \in S_i$ será escolhida.

Do fato que a estratégia s'_i é estritamente dominante, segue-se que, para quaisquer que sejam as combinações de estratégias escolhidas pelos outros jogadores, $s_{-i} \in S_{-i}$, qualquer outra estratégia $s_i (\neq s'_i) \in S_i$ que for escolhida é estritamente dominada. Em particular, se $s_i = s''_i$:

$$u_i(s'_i, s_{-i}) > u_i(s''_i, s_{-i})$$

Segue-se daí que o jogador $i \in I$ estará escolhendo uma estratégia estritamente dominada, o que se constitui na negação do 2º princípio da racionalidade. ■

O seguinte exemplo mostra que a volta não vale:

Exemplo 11 Dilema dos Prisioneiros Ampliado II (Continuação)

1º Princípio de Racionalidade $\not\Rightarrow$ 2º Princípio de Racionalidade

Vimos que aplicando o 1º princípio de racionalidade não obteremos uma boa previsão sobre a solução do jogo.

Observação 11 Doravante, sempre que nos referirmos à racionalidade individual em situações de interdependência estratégica estaremos equivalentemente aplicando o 2º princípio de racionalidade para jogos.

2.2 O Conhecimento Comum da Racionalidade e a Eliminação Iterada de Estratégias Estritamente Dominadas

Apresentaremos, a seguir, uma idéia heurística de conhecimento. No apêndice A é apresentada uma breve introdução ao conceito de conhecimento comum.

Axioma 3 *Conhecimento*

“O jogador $i \in I$, em um jogo Γ' , sabe que os outros jogadores j , ($i \neq j \in I$) são racionais”.

Se cada jogador for racional e, além disso, se este axioma vale (para cada um dos jogadores) então é como se existisse uma hipótese implícita de que “cada jogador sabe que os outros jogadores sabem qual é o jogo”.

Exemplo 12 *Dilema dos Prisioneiros Ampliado II (Continuação)*

O operador conhecimento é definido a partir das hipóteses que os jogadores fazem uns em relação aos outros:

- i) Os jogadores são racionais. Assim o jogador 1 não escolhe b e o jogador 2 não escolhe d ;
- ii) O indivíduo 1 sabe que 2 é racional. Isto quer dizer que 1 sabe que 2 escolhe e (aplicando recursivamente o operador conhecimento sobre a racionalidade) Assim, sabendo que o jogador 2 é racional e sendo racional, isto quer dizer que o jogador 1, escolhe c .

Logo, se os jogadores são racionais e se o jogador 1 sabe que o jogador 2 é racional então a combinação de estratégias (c, e) representará a solução deste jogo.

O princípio da eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas consiste em aplicar sucessivamente o operador conhecimento e a eliminação de estratégias estritamente dominadas remanescentes de cada iteração anterior até que se alcance uma combinação de estratégias dos jogadores em que não exista mais nenhuma estratégia estritamente dominada, para qualquer um dos jogadores. Veremos que nem sempre este procedimento nos permite indicar a solução de um jogo.

Exemplo 13 *Dilema dos Prisioneiros Ampliado III*

| | | | | |
|--|---|----------------|-------------|-------------|
| | | 2 | | |
| | | e | d | f |
| | 1 | a $(-8, -8)$ | $(0, -10)$ | $(-8, 0)$ |
| | | b $(-10, 0)$ | $(-1, -1)$ | $(-10, -8)$ |
| | | c $(0, -8)$ | $(-8, -10)$ | $(0, 0)$ |

Sendo racional o jogador 1 não escolherá a estratégia b (pois é estritamente dominada por a). Por sua vez, a racionalidade do jogador 2 implica que ele não escolherá a estratégia d (que é estritamente dominada por e). Assim, eliminamos as combinações de estratégias dos jogadores que envolvem a escolha da estratégia b pelo jogador 1 e da estratégia d pelo jogador 2.

Se o jogador 1 sabe que o jogador 2 é racional (e , portanto, não escolherá a estratégia d) então ele escolherá a estratégia c (a estratégia a não é escolhida, pois é estritamente dominada). Similarmente, se o jogador 2 sabe que o jogador 1 é racional (e , portanto, não escolherá a estratégia b) então ele escolherá a estratégia f (a estratégia e não é escolhida, pois é estritamente dominada)

Assim, após 2 iterações do axioma do conhecimento a combinação de estratégias (c, f) é a única que resiste à eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas e se constituirá, portanto, na solução do jogo.

Proposição 2 *Se, do processo de eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas, a combinação de estratégias $(s'_i, s'_{-i}) \in S_i \times S_{-i}$ for a única remanescente então ela será a solução do jogo.*

Prova. Omitida. ■

Exemplo 14 Par ou Ímpar (Continuação)

Quaisquer combinações de estratégias puras dos jogadores resistem à eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas.

O jogo "batalha dos sexos" é um outro exemplo onde quaisquer combinações de estratégias resiste à eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas.

Exemplo 15 Batalha dos Sexos

| | | | |
|---|------|--------|--------|
| | | 2 | |
| | | Balé | Boxe |
| 1 | Balé | (2, 1) | (0, 0) |
| | Boxe | (0, 0) | (1, 2) |

Utilizando os conceitos já apresentados vemos que qualquer combinação de estratégias deste jogo resiste à eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas.

Definição 20 Equilíbrio que Resiste à Eliminações Iteradas de Estratégias Estrictamente Dominadas

Iterações sucessivas do axioma de conhecimento e da racionalidade dos jogadores acabam conduzindo à um conjunto de combinação de estratégias que resiste à eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas, que representarão as combinações de estratégias que são de conhecimento comum⁵ que podem vir a serem escolhidas.⁶

Observação 13 Em um jogo Γ o número de iterações necessárias para se alcançar a combinação de estratégias que resiste à eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas não será maior do que a soma das estratégias puras dos indivíduos.

Proposição 3 Seja $(s_i, s_{-i}) \in S_i \times S_{-i}$ uma combinação de estratégias em um jogo Γ' .

Se a combinação de estratégias (s'_i, s'_{-i}) representar um equilíbrio em estratégias estritamente dominantes, então (s'_i, s'_{-i}) também será um equilíbrio que resiste à eliminação de uma única iteração de estratégias estritamente dominadas.

Prova. Omitida. ■

O seguinte exemplo mostra que a volta não é verdade:

Exemplo 16 Batalha dos Sexos (Continuação)

Vimos que qualquer combinação de estratégias deste jogo resiste à eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas. Entretanto, nenhuma combinação de estratégias, $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$, representa um equilíbrio em estratégias estritamente dominantes.

5

Observação 12 Bernheim e Pearce [1984] apresentaram uma definição de equilíbrio – equilíbrio racionalizável – cuja inspiração é a mesma da eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas, mas cuja formalização é diferente. Entretanto, no caso de jogos finitos com dois jogadores estes dois conceitos são equivalentes.

Tan e Werlang (1988) mostraram que conhecimento da racionalidade até iteração de nível k é equivalente a equilíbrio racionalizável de nível k .

⁶Esta é a idéia heurística de conhecimento comum: todos os jogadores são racionais, cada um dos jogadores sabe que todos os outros jogadores são racionais, cada um dos jogadores sabe que todos os jogadores sabem que todos os jogadores são racionais, ad infinitum. Conhecimento comum foi inicialmente estudado por Aumann [1976]. Tan e Werlang [1988] estenderam esse conceito para jogos.

3 O Equilíbrio de Nash

Suponha que se tenha atingido um conjunto de combinações de estratégias que resistem à eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas⁷. Se, além disso, adicionarmos a hipótese de que qualquer um dos jogadores $i \in I$ sabe qual será a combinação de estratégias jogadas pelos outros jogadores (i.e., o que é jogado é conhecido) então esta combinação de estratégias possui a propriedade de que uma vez que cada jogador tenha feito a sua escolha, que, conforme veremos, é uma resposta ótima em relação à combinação de estratégias escolhidas pelos outros jogadores (o que é verdadeiro para cada um dos jogadores) então nenhum dos jogadores se arrepende de suas escolhas. Assim, ainda que cada jogador pudesse escolher outras estratégias, nenhum deles teria ganho ao se desviar da combinação de estratégia em questão. Esta é a essência do equilíbrio de Nash que discutiremos nesta seção.

3.1 Equilíbrio de Nash em Estratégias Puras

Definição 21 *Equilíbrio de Nash em estratégias puras*

Seja $(s_i, s_{-i}) \in S_i \times S_{-i}$ uma combinação de estratégias em um jogo Γ .

A combinação de estratégias (s'_i, s'_{-i}) representa um equilíbrio de Nash se, para todo $i \in I$, valer que:

$$u_i(s'_i, s'_{-i}) \geq u_i(s_i, s'_{-i}), \text{ para todas } s_i \in S_i.$$

De outro modo, para todo $i \in I$, a estratégia $s'_i \in S_i$, é tal que:

$$s'_i \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s'_{-i})^8$$

Exemplo 17 *Batalha dos Sexos (Continuação)*

As combinações de estratégias (boxe, boxe) e (balé, balé) representam equilíbrios de Nash em estratégias puras.

Note que a definição de equilíbrio de Nash não permite escolhas entre equilíbrios (i.e., não podemos afirmar que, dentre vários equilíbrios de Nash um deles represente o "status quo")

Definição 22 *Correspondência de Melhor Resposta do i-ésimo jogador*

Seja $(s_i, s_{-i}) \in S_i \times S_{-i}$ uma combinação de estratégias em um jogo Γ .

A correspondência $F : S_i \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada $(s_i, s'_{-i}) \in S_i \times S_{-i}$ (com $s'_{-i} \in S_{-i}$ fixo) associa um subconjunto de valores reais, definida por $F(s_i) = u_i(s_i, s'_{-i})$, é chamada de correspondência de melhor resposta por parte do i-ésimo jogador.

Teorema 1 *Existência de Equilíbrio de Nash (em Estratégias Puras)*

Seja $(s_i, s_{-i}) \in S_i \times S_{-i}$ uma combinação de estratégias em um jogo Γ .

Suponha que, para todo $i \in I$:

- i) Existam $k_i \in \mathbb{N}$ tais que $S_i \subset \mathbb{R}^{k_i}$;
- ii) S_i é não vazio, compacto e convexo;
- iii) $u_i : S_i \times S_{-i} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $S_i \times S_{-i}$;
- iv) $u_i : S_i \times S_{-i} \rightarrow \mathbb{R}$ é quase-côncava em $s_i \in S_i$, para toda $s'_{-i} \in S_{-i}$.

Então existe (s'_i, s'_{-i}) que é Equilíbrio de Nash.⁹

Prova. Omitida. ■

⁷Esta hipótese não é necessária se estivermos considerando somente estratégias puras.

⁸Isto é, em um equilíbrio de Nash, a estratégia de equilíbrio de cada jogador é uma melhor resposta à crença de que os jogadores irão adotar as suas estratégias de equilíbrio.

⁹No caso de jogos finitos (i.e., jogos com um número finito de jogadores, cada um dos quais com conjuntos de estratégias finitas) não podemos assegurar a existência de Equilíbrio de Nash, como por exemplo no jogo "Par ou Impar".

Exemplo 18 Oligopólio de Cournot

Cournot admite um mercado onde n empresas concorram para a produção de um produto homogêneo, onde a curva de demanda inversa é $P = f(Q)$ (por exemplo, $P = \max\{a - bQ; 0\}$, com $a, b > 0$), sendo Q o total das quantidades vendidas pelas n empresas. Designando por q_i a quantidade produzida pela i -ésima empresa, por $C_i(q_i)$ o custo de produção dessa quantidade e supondo que as quantidades vendidas sejam iguais às produzidas (i.e., $Q = q_1 + q_2 + \dots + q_n$), o lucro da i -ésima empresa será:

$$\pi_i(q_i, q_{-i}) = P \cdot q_i - C_i(q_i) = f(q_1 + q_2 + \dots + q_n) \cdot q_i - C_i(q_i)$$

Por hipótese, a função lucro será contínua em todas as suas variáveis, côncava em q_i e que $0 \leq q_i \leq \bar{q}_i$

Cada empresa ($i = 1, \dots, n$) irá escolher q_i^* de modo a maximizar o seu lucro tomando como dadas as quantidades escolhidas pelas concorrentes.

Mais especificamente, considere o duopólio onde as duas empresas possuam custos fixos nulos e custos marginais iguais: $C_i(q_i) = q_i$, $i = 1, 2$. A função de demanda, na sua forma inversa é dada por: $P = \max\{2 - Q; 0\}$, onde $Q = q_1 + q_2$.

Os lucros das empresas serão:

$$\begin{aligned} \pi_1(q_1, q_2) &= (2 - q_1 - q_2)q_1 - q_1 \\ \pi_2(q_1, q_2) &= (2 - q_1 - q_2)q_2 - q_2 \end{aligned} \Rightarrow q_1 = q_2 = 1/3$$

Exemplo 19 Oligopólio Cartelizado

Ocorre quando as firmas decidem se juntar de modo a conjuntamente escolher o nível de produção de modo a maximizar o lucro agregado. Então, cada produtor individual irá estar tentado a produzir mais dado que ele pensa que os outros irão manter a produção combinada. Dado que todos pensarão da mesma forma, então cada um acabará produzindo a quantidade de Cournot, o que mostra que a solução cartelizada não é estável.

Proposição 4 Seja $(s_i, s_{-i}) \in S_i \times S_{-i}$ uma combinação de estratégias em um jogo Γ .

Se (s'_i, s'_{-i}) for um equilíbrio em estratégias estritamente dominantes então (s'_i, s'_{-i}) será um equilíbrio de Nash.

Prova. Omitida. ■

O seguinte exemplo mostra que a volta não vale:

Exemplo 20 Batalha dos Sexos (Continuação)

Vimos que as combinações de estratégias puras (boxe, boxe) e (balé, balé) representam equilíbrios de Nash em estratégias puras, entretanto, nenhuma delas representa um equilíbrio em estratégias estritamente dominantes.

Proposição 5 Seja $(s_i, s_{-i}) \in S_i \times S_{-i}$ uma combinação de estratégias em um jogo Γ .

Se (s'_i, s'_{-i}) for um equilíbrio de Nash então (s'_i, s'_{-i}) resiste ao processo de eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas.

Prova. Omitida. ■

Proposição 6 Seja $(s_i, s_{-i}) \in S_i \times S_{-i}$ uma combinação de estratégias em um jogo Γ .

Se, do processo da eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas, a combinação de estratégias (s'_i, s'_{-i}) for a única que resiste, então (s'_i, s'_{-i}) será o único equilíbrio de Nash do jogo Γ .

Prova. Omitida. ■

3.2 Equilíbrio de Nash em Estratégias Mistas.

Vimos na subsecção anterior que o conjunto das combinações estratégicas que resiste à eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas e não vazio, e que quando for unitário então a combinação de estratégias representará a solução do jogo. Caso o conjunto de combinações de estratégias não seja unitário então o equilíbrio de Nash em estratégias puras permite alcançar uma solução do jogo. O jogo "Par ou Ímpar" serve para mostrar que nem sempre é possível obter um equilíbrio de Nash em estratégias puras. Entretanto, se estratégias mistas forem permitidas, podemos assegurar que todo jogo finito possui pelo menos um equilíbrio de Nash em estratégias mistas, que se constituirá na solução do jogo caso seja único.

Definição 23 *Equilíbrio de Nash em Estratégias Mistas*

Seja $(\sigma_i, \sigma_{-i}) \in \Delta(S_i) \times \Delta(S_{-i})$ uma combinação de estratégias em um jogo Γ .

A combinação de estratégias $(\sigma'_i, \sigma'_{-i})$ representa um equilíbrio de Nash em estratégias mistas se, para todo $i \in I$, valer que:

$$U_i(\sigma'_i, \sigma'_{-i}) \geq U_i(\sigma_i, \sigma'_{-i}), \text{ para todas } \sigma_i \in \Delta(S_i).$$

De outro modo, σ_i maximiza a utilidade esperada do jogador $i \in I$, do seguinte modo:

$$\sigma'_i \max_{\sigma_i} U_i(\sigma_i, \sigma'_{-i}) \Leftrightarrow \sigma'_i \max_{\sigma_i} \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sigma'_{-i}(s_{-i}) u_i(s_i, s_{-i})$$

Onde: $\sigma_i(s_i)$ é a probabilidade do indivíduo $i \in I$ jogar $s_i \in S_i$.

Exemplo 21 *Par ou Ímpar (continuação)*

A combinação de estratégias $(\sigma_1^{Par}, \sigma_2^{Par}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ é o equilíbrio de Nash em estratégias mistas deste jogo. Como este equilíbrio é único no jogo então ele representa a solução.

Teorema 2 Nash (1951)

Existência de Equilíbrio de Nash em Estratégias Mistas

Todo jogo Γ possui pelo menos um equilíbrio de Nash em estratégias mistas.

Prova. Omitida. ■

Corolário 1 *Seja $(s_i, s_{-i}) \in S_i \times S_{-i}$ uma combinação de estratégias em um jogo Γ .*

Se (s'_i, s'_{-i}) for um equilíbrio de Nash (em estratégias puras) em um jogo Γ , então $(\sigma'_i, \sigma'_{-i}) \in \Delta(S_i) \times \Delta(S_{-i})$ é um equilíbrio de Nash em estratégias mistas no jogo modificado Γ .

onde, para todo $i \in I$: $\sigma'_i \in \Delta(S_i)$ é a distribuição de probabilidade que atribui massa plena à escolha da estratégia $s'_i \in S_i$.

Prova. Omitida. ■

Exemplo 22 *Batalha dos Sexos (Continuação)*

Vimos que as combinações de estratégias puras (balé, balé) e (boxe, boxe) representam equilíbrios de Nash em estratégias puras. Tais combinações de estratégias podem, equivalentemente serem consideradas estratégias mistas degeneradas:

$$(balé, balé) \in S_1 \times S_2 \Leftrightarrow (\sigma_1^{balé}, \sigma_2^{balé}) = (1, 1) \in \Delta(S_1) \times \Delta(S_2)$$

$$(boxe, boxe) \in S_1 \times S_2 \Leftrightarrow (\sigma_1^{boxe}, \sigma_2^{boxe}) = (0, 0) \in \Delta(S_1) \times \Delta(S_2)$$

Notemos, ainda que este jogo também possui um outro equilíbrio em estratégias mistas (não degeneradas):

$$(\sigma_1^{balé}, \sigma_2^{balé}) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) \in \Delta(S_1) \times \Delta(S_2)$$

References

- [1] Berge, C. [1963] "Topological Spaces". Macmillan.
- [2] Border, K.C. [1985] "Fixed Points Theorems with Applications to Economics and Game Theory" Cambridge University Press.
- [3] Bernheim, P.[1984] "Rationalizable Strategic Behavior". *Econometrica*, 52: 1007-1028.
- [4] Bertrand, J. [1883] "Théorie Mathématique de La Richese Sociale". *Journal des Savants*, 499-508.
- [5] Cournot, A. [1838] "Recherches sur des Principes Mathematiques de la Theoria des richerches. English edition (ed. N. Bacon): "Reserches into the Mathematical Principles of the Theory of wealth" (Macmillan, 1897).
- [6] Debreu, G. [1959] " Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium". Willey.
- [7] Dasgupta, P. & E. Maskin [1986]. "The Existence of Equilibrium in Discontinuous Economic Games. 1: Theory". *Review of Economic Studies*, 53: 1-26.
- [8] Debreu, D. [1952]. "A social Equilibrium Existence Theorem". *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 38: 386-393.
- [9] Edgeworth, F. [1897] "La Teoria Pura del Monopolio". *Giornale degli Economisti*, 13-31.
- [10] Fan, K. [1952] "Fixed Point and Minimax Theorems in Locally Convex Topological Linear Spaces". *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 38: 121-126.
- [11] Gale, D. [1960] "The Theory of Linear Economic Models" Mc Graw Hill.
- [12] Glicksberg, I. L. [1952] "A Further Generalization of The Kakutani Fixed Point Theorem with Application to Nash Equilibrium Points". *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 38: 170-174.
- [13] Hagenmayer S. J. [1995] "Albert Tucker, 89, Famed Mathematician" *The Philadelphia Inquirer*, February, 2, p. B7.
- [14] Hildebrand, W. [1974] "Core and Equilibria of a Larger Economy". Princeton University Press.
- [15] Kakutani, S. [1941] "A Generalization of Brower's Fixed Point Theorem" *Duke Mathematical Journal* 8: 457-459.
- [16] Kuhn, H. [1953] "Extensive Games and the Problem of Information". *Annals of Mathematics studies*, n° 28. Princeton University Press.
- [17] Luce, D. & H. Raiffa [1957]. "Games and Decisions". Willey.
- [18] Nash, J. [1950a] "Equilibrium Points in N-Person Games". *Proceedings of the National Academy of Sciences* 36: 48-49.
- [19] Nash, J. [1950b] "The Bargain Problem". *Econometrica* 18: 155-162.
- [20] Nash, J. [1951] "Non Cooperative Games" *Annals of Mathematics* 54: 286-295.
- [21] Nash, J. [1953] "Two Person Cooperative Games". *Econometrica* 21: 128-140.
- [22] von Neumann, J. [1928] "Zur Theorie der Gesellschaftsspiele". *Math. Annals* 100: 295-320.
- [23] von Neumann, J. & O. Morgenstern [1944] "Theory of Games and Economic Behavior". 1953 (3rd ed). Princeton University Press.
- [24] Nikaido, H. [1968] "Convex Structures and Economic Theory" Academic Press.
- [25] Pearce, D.G. [1984] "Rationalizable Strategic Behavior and the Problem of Perfection". *Econometrica*, 52: 10029-1050.

- [26] Takayama, A. [1974] "Mathematical Economies" 1985 (2nd ed). Cambridge University Press.
- [27] Torres_Martinez, J. P. [2002] "Fixed Points Theorems via Nash Equilibria" mimeo Departamento de Economia, PUC-Rio.
- [28] Zermelo, E. [1913] "Über Line Anwendung der Mengenehre anf die Theorie des Schachspiels" Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematics, 2: 501-504.

A Conhecimento Comum: Uma Introdução

"Eu sei determinada coisa". Como incorporar esse conhecimento na análise lógica?

O mundo pode ser descrito por um espaço amostral Ω , também conhecido como espaço das "realidades" representando uma grande incerteza sobre os possíveis estados da natureza que podem ocorrer. Cada $\omega \in \Omega$ é uma "realidade" ou realização de um estado da natureza. A "realidade" é representada por um estado a natureza $\omega \in \Omega$. Ter 30°C ou 40°C em Tóquio é irrelevante para a maioria das decisões que tenho que tomar.

Com esta maneira de olhar o mundo, dizer que algo não é possível significa que não vale em nenhum estado. Conhecer significa que qualquer que seja o estado da natureza ele terá informações parciais sobre tudo ou até desinformação tal que existe "mundos" que são equivalentes.

Consideremos Ω finito. Seja $P(\Omega)$ o conjunto que contém todos os subconjuntos de Ω .

Definição 24 Álgebra de Eventos

Σ é uma álgebra (de eventos), $\Sigma \subset P(\Omega)$, se:

- i) $\emptyset \in \Sigma$;
- ii) $A \in \Sigma \implies A^C \in \Sigma$;
- iii) $A, B \in \Sigma \implies A \cup B \in \Sigma$

Cada agente i tem uma partição de Ω que representa o fato de que cada indivíduo não tem informação sobre muita coisa, só observa a "realidade" parcialmente e diferentemente de outro indivíduo.

Seja Π_i uma partição de Ω , representando a estrutura de informação do indivíduo i . Quanto maior for a capacidade de distinguir estados da natureza, mais refinado será o seu conjunto de informação.

$\Pi_i(\omega)$ corresponde ao elemento da partição Π_i que compreende ω .

Exemplo 23 Considere o lançamento de um dado:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Seja a partição do jogador I:

$$\Pi_I = \{\{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}\}$$

Por outro lado um jogador II, cuja partição é dada por:

$$\Pi_{II} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$$

É capaz de distinguir exatamente o estado da natureza que ocorreu.

Você sabe alguma coisa quando para todos os estados da natureza que puderem ocorrer aquilo é verdadeiro.

Se a realidade for $v = 2$, então o indivíduo I não sabe distinguí-lo de $v = 4$, ou $v = 6$, enquanto que o indivíduo II sabe distinguí-lo dos demais.

Exemplo 24 *Suponha que se saiba que a temperatura ambiente, em um determinado lugar, está compreendida entre $-30^{\circ}C$ e $50^{\circ}C$ (ou seja, $\Omega \in [-30; 50]^{\circ}C$).*

A maneira mais simples de conhecer a temperatura é através da observação de um termômetro de mercúrio analógico, embora nosso sentido visual só se a capaz de distinguir as temperaturas em intervalos aproximados por números inteiros (digitalizando, desse modo, a informação recebida). A capacidade de percepção distinguirá os observadores e determinará quão mais precisa será a informação. Suponha que um indivíduo, I , possua a seguinte partição digitalizada da temperatura, com base na medição do termômetro analógico:

$$\Pi_I = \{[-30; -29, 5]; [-29, 5; -28, 5]; \dots[-0, 5; 0, 5]; \dots; [48, 5; 49, 5]; [49, 5; 50]\}^{\circ}C$$

Considere, agora, outro indivíduo, II , que não possui um termômetro, mas que tenha um balde d'água, tal que se saiba que a água congele exatamente à $0^{\circ}C$. Portanto, sua partição será dada por:

$$\Pi_{II} = \{[-30; 0];]0; 50]\}^{\circ}C$$

Desse modo, acabamos de ver que os dois indivíduos possuem informações diferentes sobre os eventos que podem ocorrer. É nesse contexto que podemos definir uma axiomatização sobre a palavra "saber".

Definindo um evento (temos que observar qual é o verdadeiro estado da natureza) queremos identificar se os indivíduos são capazes de, observando um estado da natureza, saber se o evento ocorreu ou não.

"Se $\omega \in \Omega$ é o estado da natureza, então será que o indivíduo i sabe que o evento A ocorreu?"

Suponha que o evento A é definido por:

$$A = [-10; 10]^{\circ}C$$

Se $\omega = 5^{\circ}C$ então, para o indivíduo I , $\Pi_I(5) =]4, 5; 5, 5]^{\circ}C$, enquanto que para o indivíduo II , $\Pi_{II}(5) =]0; 50]^{\circ}C$.

Ora, como $]4, 5; 5, 5] \subset [-10; 10]^{\circ}C$ então isto significa que o indivíduo I sabe com certeza que o evento A ocorreu se $\omega = 5^{\circ}C$.

Por outro lado, como $]0; 50] \not\subset [-10; 10]^{\circ}C$ então isto significa que o indivíduo II quando observa a temperatura de $5^{\circ}C$ não é capaz de distingui-la de, por exemplo, $20^{\circ}C$ e, portanto, ele não é capaz de saber se o evento A ocorreu ou não se $\omega = 5^{\circ}C$.

Consideremos, agora, o evento B , definido por:

$$B = [-30; 0]$$

Se $\omega = -5^{\circ}C$ então, para o indivíduo I , $\Pi_I(-5) =]-5, 5; -4, 5]^{\circ}C$, enquanto que para o indivíduo II , $\Pi_{II}(-5) = [-30; 0]^{\circ}C$.

Ora, como $] -5, 5; -4, 5] \subset [-30; 0]^{\circ}C$ então isto significa que o indivíduo I sabe com certeza que o evento A ocorreu se $\omega = -5^{\circ}C$. O mesmo vale para o indivíduo II , pois $[-30; 0] \subset [-30; 0]^{\circ}C$.

Formalizando a frase: "O indivíduo i sabe que A ocorreu caso ω' seja o estado da natureza".

Sabemos que o indivíduo i sabe que o evento A ocorreu, quando ω' é o estado da natureza, se $\Pi_i(\omega') \in A$.

Definição 25 *O indivíduo i sabe que o evento A ocorreu caso ω' seja o estado da natureza.*

$$\text{Seja } K_{1i}(A) = \{\omega \in \Omega; \Pi_i(\omega) \subset A\}$$

Diz-se que o indivíduo i sabe que o evento A ocorreu caso ω' seja o estado da natureza se $\omega' \in K_{1i}(A)$.

Formalizando a frase: "O indivíduo i sabe que A ocorreu e sabe que os indivíduos j 's sabem que A ocorreu caso ω' seja o estado da natureza".

Definição 26 *O indivíduo i sabe que o evento A ocorreu e sabe que os indivíduos j 's sabem que o evento A ocorreu caso ω' seja o estado da natureza.*

Seja $K_{2i}(A) = \{\omega \in \Omega; \Pi_i(\omega) \subset K_j(A), \forall j\}$

Diz-se que o indivíduo i sabe que o evento A ocorreu e sabe que os indivíduos j 's sabem que o evento A ocorreu caso ω' seja o estado da natureza se $\omega' \in K_{2i}(A)$.

Generalizando, formalizamos a frase: "O indivíduo i sabe que o evento A ocorreu e sabe que (os indivíduos j 's sabem que) ^{m} o evento A ocorreu caso ω' seja o estado da natureza".

Definição 27 *O indivíduo i sabe que o evento A ocorreu e (sabe que os indivíduos j 's sabem que) ^{m} o evento A ocorreu caso ω' seja o estado da natureza.*

Seja $K_{(m+1),i}(A) = \{\omega \in \Omega; \Pi_i(\omega) \subset K_{mj}(A), \forall j\}$

Diz se que o indivíduo i sabe que o evento A ocorreu e (sabe que os indivíduos j 's sabem que) ^{m} o evento A ocorreu caso ω' seja o estado da natureza se $\omega' \in K_{(m+1),i}(A)$.

Finalmente, podemos definir quando um evento A é de conhecimento comum.

Definição 28 *Conhecimento Comum*

Se o indivíduo i sabe que o evento A ocorreu e (sabe que os indivíduos j 's sabem que) ^{m} o evento A ocorreu e que, para todo $m \geq 1$, quando:

Seja $K_A = \cap K_{mi}(A), \forall m \geq 1$.

Diz-se que o evento A é de conhecimento comum caso ω' seja o estado da natureza se $\omega' \in K_A$.

Proposição 7 $\cap K_{mi}(A)$ é independente de i .

Prova. Omitida. ■

Definição 29 *Partição mais fina*

$\Pi_i \wedge \Pi_j$ é a partição mais fina se Π_i e Π_j são refinamentos desta (i.e., subpartições).

Digamos que ocorreu ω' . A seguinte proposição estabelece as condições sob as quais a ocorrência deste estado revela que um evento A é de conhecimento comum.

Proposição 8 $\omega \in K_A \iff \exists \omega \in B, B$ é a união dos elementos de $\Pi_i \wedge \dots \wedge \Pi_n$ e $B \subset A$.

Prova. Omitida. ■

A.1 Uma Crítica à Noção de Conhecimento que está Embutida nos Conceitos de Equilíbrios Apresentados

Vimos que se o conjunto de combinações estratégicas que resiste à eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas for constituída por mais de um elemento, então o conceito de equilíbrio de Nash nos permite alcançar um conjunto mais restrito de combinações estratégicas, que poderão representar a solução de um jogo. O seguinte exemplo, discutido inicialmente na tese de Doutorado de Werlang (1986), e apresentado em Dow-Werlang (1994), nos leva a desconfiar se, de fato, os jogadores aplicam estes conceitos em todas as circunstâncias.

Exemplo 25 (Werlang (1986), Dow-Werlang (1994))

Considere que no jogo abaixo as utilidades dos jogadores são avaliadas em unidades monetárias:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} e & d \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{array}{cc} c & b \end{array} \\ \begin{array}{cc} (10^6, 10^6) & (-10^6, 10^6 - \alpha) \\ (10^6 - \varepsilon, 10^6) & (10^6 - \varepsilon, 10^6 - \alpha) \end{array} & \alpha, \varepsilon > 0 \end{array}$$

Se aplicando o 2º princípio de racionalidade não podemos afirmar nada para o jogador 1, mas, por outro lado, podemos concluir que o jogador 2 irá escolher a estratégia e . Se considerarmos o axioma do conhecimento então o jogador 1 sabendo que o jogador 2 é racional irá escolher a estratégia c .

Assim utilizando o fato que os jogadores são racionais e o jogador 1 sabe que o jogador 2 é racional poderíamos concluir que a combinação de estratégias (c, e) representará a solução do jogo.

O que este exemplo mostra é que a noção de conhecimento que nos permite alcançar soluções dos jogos, ou equilíbrios de Nash, é muito forte, pois exige um grau de conhecimento (expresso através da palavra "saber") muito elevado¹⁰. Note que, do ponto de vista do jogador 1, dependendo do conhecimento que ele tenha a respeito de seu adversário, quanto menor for o valor de α mais tentado ele estará em mudar para a estratégia b que lhe garantirá $10^6 - \varepsilon$ ao certo, o que nos levaria a duvidar que a combinação de estratégias (c, e) venha a ser, um bom predictor do comportamento dos jogadores deste jogo.

A literatura de Incerteza Knightiana não trabalha com hipóteses tão fortes a respeito do grau de conhecimento dos agentes, tratando-se, portanto, de um conceito mais fraco do que os apresentados até aqui, mas que, como veremos, nos permitem explicar o desvio de comportamento em jogos não cooperativos.

B Apêndice Matemático

B.1 Teorema do Máximo para Correspondências

O Teorema do Máximo de Berge estabelece as condições sob as quais podemos assegurar a existência de um máximo quando trabalhamos com correspondências. Iniciaremos apresentando a definição de correspondência e duas definições de semicontinuidades que a ela estão associadas: superiormente e inferiormente, que servirão de base para a definição de uma correspondência contínua

B.1.1 Correspondências Semicontínuas Superiormente e Inferiormente

Uma correspondência é uma função $\varphi : X \rightarrow 2^Y$ (onde 2^Y é o conjunto das partes de Y , i.e. é o conjunto de subconjuntos de Y) que associa cada elemento do domínio à um conjunto e não a somente um ponto, p.ex. $X \subseteq \mathbb{R}^m$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^n$.

Como nós definimos a "continuidade" para uma correspondência?

O passo inicial consiste em definir, precisamente, semi continuidade superiormente e semicontinuidade inferiormente de uma correspondência.

Definição 30 *Semicontinuidade Superiormente (Def:1.8.d em Debreu, 1959)*

Uma correspondência $\varphi : X \rightarrow Y$ (p.ex. $X \subseteq \mathbb{R}^m$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^n$) é "semicontínua superiormente em x " sempre que as seguintes três condições forem satisfeitas para quaisquer duas sequências $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$:

- (i) $x_n \rightarrow x$
- (ii) $y_n \in \varphi(x_n)$
- (iii) $y_n \rightarrow y$

Então será também verdade que:

- (iv) $y \in \varphi(x)$.

Se φ é "semicontínua superiormente em x " para todo $x \in X$, então ela é "semicontínua superiormente"

¹⁰O conceito de "saber" tem a propriedade da omnisciência lógica, i.e., se sei um conjunto de axiomas, então também, sei todas as regras lógicas que estão por trás.

Intuitivamente, nós podemos ver este critério graficamente na figura 1: dado uma sequência $\{y_n\}$ no gráfico da correspondência que se aproxima de algum ponto y , será que este ponto y permanece no gráfico de $\varphi(x)$? Se for este o caso, então a correspondência é "semicontínua superiormente". Nós podemos ver isto na figura abaixo onde qualquer sequência $\{y_n\}$ desenhada no gráfico da correspondência irá se aproximar de um ponto (p.ex. y) pertencente ao gráfico da correspondência.

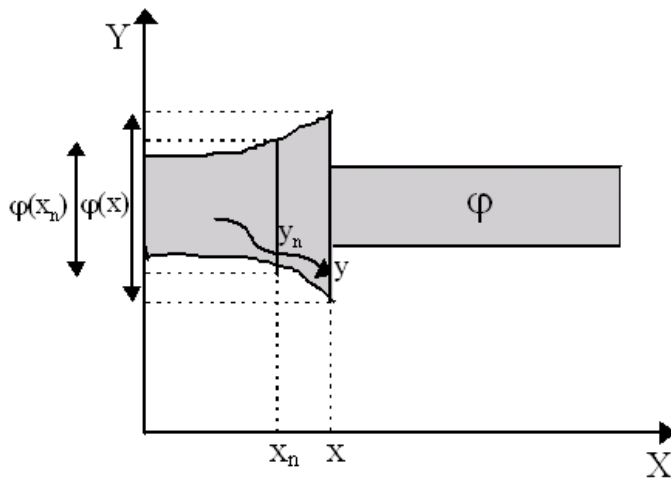


Figura 1

Seguiremos com um teorema interessante:

Teorema 3 (*Gráfico Fechado*)

Seja $\varphi : X \rightarrow Y$ uma correspondência, onde $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ são compactos. Então, φ é semicontínua superiormente se e somente se o gráfico de φ é fechado, i.e. $G_\varphi = \{(x, y) \in X \times Y / y \in \varphi(x)\}$ é um conjunto fechado em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Prova. Omitida ■

Definição 31 *Semicontinuidade Inferiormente* (Def:1.8.e em Debreu, 1959)

Uma correspondência $\varphi : X \rightarrow Y$ (p.ex. $X \subseteq \mathbb{R}^m$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^n$) é "semicontínua inferiormente em x " sempre que as seguintes três condições forem satisfeitas para quaisquer duas sequências $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$:

- (i) $x_n \rightarrow x$
- (ii) $y_n \in \varphi(x_n)$
- (iii) $y \in \varphi(x)$

Então é também verdade que: (iv) $y_n \rightarrow y$.

Se φ é "semicontínua inferiormente em x " para todo $x \in X$, então ela é "semicontínua inferiormente"

Intuitivamente, nós podemos ver este critério graficamente novamente, desta vez na figura 2: dado um ponto $y \in \varphi(x)$ no gráfico, existe uma sequência $\{y_n\}$ no gráfico da correspondência que se aproxima dele? Se for este o caso, então a correspondência é "semicontínua inferiormente". Na figura inicial 1, nós não temos uma correspondência semicontínua inferiormente em x pois o ponto $y \in \varphi(x)$ não pode ser aproximado a partir da direita por uma sequência de pontos no gráfico. Entretanto, na figura 2, a correspondência é semicontínua inferiormente na medida que qualquer ponto y em $\varphi(x)$ é aproximado através de qualquer lado por uma sequência $\{y_n\}$ no gráfico. Entretanto, o gráfico abaixo não é semicontínuo superiormente como, p.ex., nós podemos imaginar uma sequência no gráfico aproximando de y' ainda que $y' \notin \varphi(x)$.

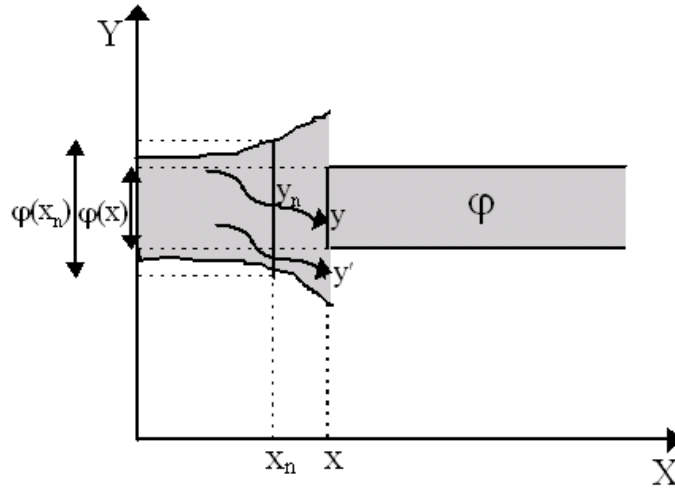


Figura 2

Notemos que, com o gráfico fechado, teremos uma correspondência semicontínua superiormente, mas não terei uma correspondência semicontínua inferiormente, pois existem sequências que convergem por um lado que não convergirão por outro.

Podemos, agora, definir a continuidade de uma correspondência.

B.1.2 Correspondências Contínuas e o Teorema de Berge

Definição 32 *Continuidade (Def. 1.8. f em Debreu, 1959)*

Uma correspondência $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é "contínua" se ela for tanto semicontínua superiormente como também semicontínua inferiormente para todo $x \in \mathbb{R}^m$.

Desse modo, nas figuras anteriores, as correspondências não são contínuas pois a primeira só é semicontínua superiormente (mas não é semicontínua inferiormente) enquanto que a segunda é semicontínua inferiormente (mas não é semicontínua superiormente).

O seguinte teorema (devido à Berge) é muito usual.

Sejam $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ e $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ (i.e. f é uma função e φ uma correspondência). Então definamos:

$$f(t) = \max f(x, t) \text{ t.q. } x \in \varphi(x)$$

$$F(t) = \arg \max f(x, t) \text{ t.q. } x \in \varphi(x).$$

Desse modo, $f(t)$ é uma função e $F(t)$ é uma correspondência (por "arg max" leia-se "o argumento (x) que maximiza $f(x, t)$ "). Então o seguinte vale:

Teorema 4 *Teorema de Berge (Th 1.8.4 em Debreu, 1959)*

Se $f(x, t)$ é uma função conjunta contínua e $\varphi(x)$ é uma correspondência que é tanto semicontínua superiormente como também semicontínua inferiormente (i.e. uma correspondência contínua), então:

- (i) $f(t)$ é uma função contínua e
- (ii) $F(t)$ é uma correspondência semicontínua superiormente.

Prova. Omitida. Ver Hildebrand (1974): p.30 ou Border (1985:p.64) ■

B.2 Teoremas de Ponto Fixo

Os teoremas de ponto fixo estão entre os melhores instrumentos que os economistas utilizam para provas de teoremas de existências. Um dos teoremas de ponto fixo mais antigos - o teorema do ponto fixo de Brouwer - foi desenvolvido em 1910 e em 1928 foi utilizado por John von Neumann para provar a existência de uma solução "minimax" em jogos com duas pessoas (o que era equivalente a provar a existência de um ponto de sela). von Neumann (1937) utilizou uma generalização do teorema de Brouwer para provar a existência de um outro ponto de sela - desta vez para um crescimento econômico balanceado para sua economia estendida. Esta generalização foi mais tarde simplificada por Kakutani (1941). Trabalhando em um contexto de Teoria dos Jogos, John Nash (1950) esteve entre os primeiros a utilizar o Teorema do ponto fixo de Kakutani.

B.2.1 Preliminares: O Teorema do Valor Intermediário

Teorema 5 *Teorema do Valor Intermediário (Bolzano)*

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, onde $[a, b]$ é um subconjunto não-vazio, compacto, convexo de \mathbb{R} e $f(a) \times f(b) < 0$, então existe um $x^* \in [a, b]$ tal que $f(x^*) = 0$.

Prova. (i) Suponha $f(a) > 0$, então isto implica $f(b) < 0$. Definam $M^+ = \{x \in [a, b] / f(x) \geq 0\}$ e $M^- = \{x \in [a, b] / f(x) \leq 0\}$. Por continuidade de f em um conjunto conexo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, então M^+ e M^- são fechados e $M^+ \cap M^- \neq \emptyset$. Suponha que não. Suponha $M^+ \cap M^- = \emptyset$ então $x \in M^+ \Rightarrow x \notin M^-$ e $x \in M^- \Rightarrow x \notin M^+$. Mas $M^+ \cup M^- = [a, b]$, que implica que $M^- = (M^+)^c$. Mas como M^+ é fechado, então M^- é aberto. Uma contradição. Desse modo, $M^+ \cap M^- \neq \emptyset$, i.e. existe um $x^* \in [a, b]$ tal que $x^* \in M^+ \cap M^-$, i.e. existe um x^* tal que $f(x^*) \leq 0$ e $f(x^*) \geq 0$. Desse modo, existe um $x^* \in [a, b]$ tal que $f(x^*) = 0$. ■

Nós podemos seguir com a seguinte demonstração:

Corolário 2 *Seja $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma função contínua. Então, existe um ponto fixo, i.e. $\exists x^* \in [0, 1]$ tal que $f(x^*) = x^*$.*

Prova. Existem duas possibilidades essenciais:

(i) se $f(0) = 0$ ou se $f(1) = 1$, então está provado.

(ii) Se $f(0) \neq 0$ e se $f(1) \neq 1$, então defina $F(x) = f(x) - x$. Neste caso:

$$F(0) = f(0) - 0 = f(0) > 0$$

$$F(1) = f(1) - 1 < 0$$

Desse modo, $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, onde $F(0) \times F(1) < 0$. Como $f(\cdot)$ é contínua, então $F(\cdot)$ é também contínua. Então utilizando o Teorema do Valor Intermediário, $\exists x^* \in [0, 1]$ tal que $F(x^*) = 0$. Pela definição de $F(\cdot)$, então $F(x^*) = f(x^*) - x^* = 0$, desse modo $f(x^*) = x^*$. ■

B.2.2 O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

O teorema do ponto fixo de Brouwer (Th. 1.10.1 em Debreu, 1959) é uma generalização do corolário do Teorema do Valor Intermediário estabelecido acima. Especificamente:

Teorema 6 *Teorema do Ponto Fixo (Brouwer)*

Seja $f : S \rightarrow S$ uma função contínua de um conjunto não-vazio, compacto e convexo $S \subset \mathbb{R}^n$ nele mesmo, então existe um $x^* \in S$ tal que $x^* = f(x^*)$ (i.e. x^* é um ponto fixo da função f).

Prova. Omitida. Ver Nikaido (1968: p.63), Scarf (1973: p.52) ou Border (1985:p.28). ■

Desse modo, o corolário anterior é simplesmente um caso especial (onde $S = [0, 1]$) do teorema do ponto fixo de Brouwer. A intuição pode ser extraída da figura 3 onde nós temos uma função f que mapeia de $[0, 1]$ a $[0, 1]$. No ponto d , obviamente x' está associado à $x'' = f(x')$ e $x' \neq x''$, desse modo d não é um ponto fixo. f intercepta a linha de 45° em 3 pontos - a , b e c - todos os quais representam diferentes pontos fixos como, por exemplo, no ponto a , $x^* = f(x^*)$.

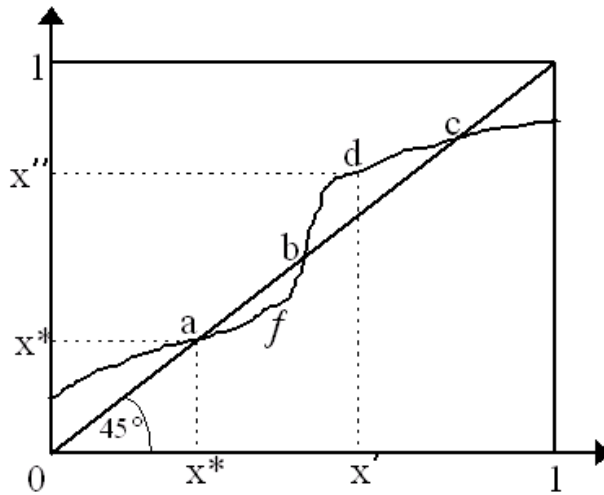


Figura 3

B.2.3 O Teorema do Ponto Fixo de Kakutani

Teorema 7 Teorema do Ponto Fixo de Kakutani

Seja $\varphi : S \rightarrow S$ uma correspondência semicontínua superiormente de um conjunto não-vazio, compacto e convexo $S \subset \mathbb{R}^n$ nele mesmo tal que para todo $x \in S$, o conjunto $\varphi(x)$ é convexo e não-vazio, então $\varphi(\cdot)$ tem um ponto fixo, i.e. existe um x^* onde $x^* \in \varphi(x^*)$.

Prova. Omitida. Ver Nikado (1968: p.67) ou Border (1985: p.72) ■

Nós podemos ver isto na figura 4 abaixo onde $S = [0,1]$ e a correspondência φ é obviamente semicontínua superiormente e assume valores convexos. Obviamente, nós temos um ponto fixo no ponto de interseção da correspondência com a linha de 45° no ponto (a) onde $x^* \in \varphi(x^*)$.

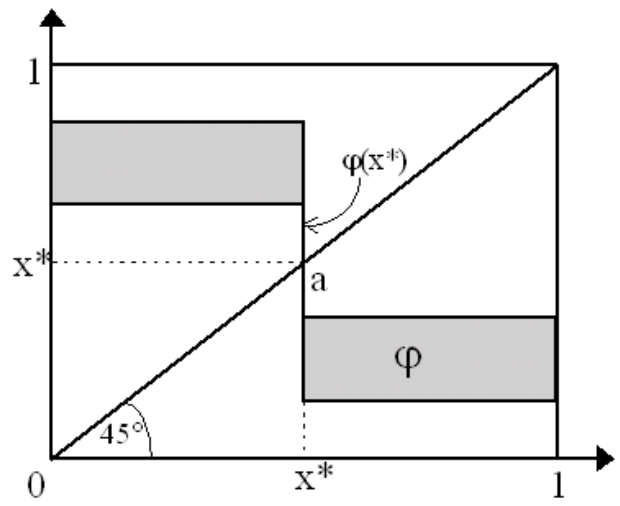


Figura 4

Note a importância dos valores convexos para este resultado na figura 4: se as porções superiores e inferiores da correspondência φ não fossem conectados por uma linha em $\varphi(x^*)$ (p.ex. se $\varphi(x^*)$ fosse meramente o final da "caixa" superior e o final da "caixa" inferior apenas e desse modo não teria valores convexos), então a correspondência seria ainda semicontínua superiormente (apesar de não possuir valores convexos) mas ela não interceptaria a linha de 45° (desse modo $x^* \notin \varphi(x^*)$) e desse modo não existiria nenhum ponto fixo, i.e. nenhum x^* tal que $x^* \in \varphi(x^*)$. Desse modo valores convexificados é instrumental.