Apresentando o Futuros de Juros*

Paulo C. Coimbra†
FUCAPE‡

27 de Agosto de 2007

1 Renda Fixa

1.1 Valor Presente (VP) e Valor Presente Líquido (VPL)

O valor presente e o valor presente líquido, são relacionados ao valor hoje de um fluxos de caixa futuro antecipado.

O valor presente (VP) é calculado como se segue:

$$VP = \sum_{t=1}^{T} C_t (1+r)^{-t}$$

onde: C_t é o fluxo de caixa do investimento no período t;
r é a taxa de desconto aplicada ao investimento.

i.e., corresponde ao valor hoje do fluxo de caixa futuro, representando, desse modo, o valor do investimento.

O valor presente líquido (VPL) é calculado como se segue:

$$VPL = C_0 + \sum_{t=1}^{T} C_t (1+r)^{-t}$$

onde: C_0 é o valor do investimento.

*Notas de aula baseadas em uma versão preliminar (preparadas por Marcelo Nazareth e Paulo C. Coimbra) das notas de aula do curso Renda Fixa, ministrado pelo Professor Marcelo Nazareth no programa de Mestrado em Metodos Quantitativos em Financas, no IMPA, especialmente adaptadas para uma aula sobre Futuros de Juros para o curso de Financas IV, da graduacao da FUCAPE, extraordinariamente ministrada pelo Professor Paulo C. Coimbra em 27 de agosto de 2007. A ultima secao foi extraida do site da BM&F. Comentários e sugestões são bem vindos. Os possíveis erros e omissões são de minha responsabilidade.

†Professor da FUCAPE; e-mail: pc.coimbra@gmail.com
‡FUCAPE Business School; Av Fernando Ferrari, 1358; Goiabeiras; Vitoria, ES, Brazil, 29.075-010.

i.e., corresponde à soma do valor do investimento mais o valor hoje do fluxo de caixa futuro. Note que se $VPL < 0$ então isto significa que o investimento não vale à pena.

Como um exemplo, suponha um investimento que pague $R\$100,00$ por ano, no final deste e de cada um dos próximos 4 anos. Se um banco pagar uma taxa de $10\% a.a.$, por um depósito de 5 anos, então estes 10% representa o custo de oportunidade do investimento a cada ano, i.e., o melhor retorno alternativo que serve de comparação para a decisão de investimentos. Então o VP, i.e., o valor hoje do investimento será de $R\$379,08$. Desse modo, se o custo desse investimento fosse de $R\$400,00$ então não valeria à pena, pois o VPL seria igual a $-R\$20,92$.

1.2 A Taxa Interna de Retorno

A taxa interna de retorno é a taxa de retorno composta r^* que torna o VPL igual a zero.

$$C_0 + \sum_{t=1}^{T} C_t(1+r^*)^{-t} = 0$$

Seguindo o exemplo anterior, a taxa interna de retorno compapatível com um investimento de $R\$400,00$ deveria ser igual a $7,93\%$.

1.3 O Valor Futuro

Ao contrário do valor presente, o valor futuro (VF) está relacionado ao valor no futuro de uma série de fluxos de caixa e é calculado como se segue:

$$VF = \sum_{t=1}^{T} C_t(1+r)^{(T-t)}$$

onde: C_t é o fluxo de caixa do investimento no período t.

i.e., corresponde ao valor futuro do fluxo de caixa, representando o valor no período T da série de fluxos de caixa.

1.4 Convenções de Mercado

Seja um título com com maturidade em T, onde T é uma data no futuro. Suponha que esse título seja um *zero cupon bond*, isto é, ele faz juz a um único pagamento unitário na data T. Seu preço hoje é dado por $B(0,T)$. A taxa de juros associada a esse preço é representada por $Y(0,T)$.

Diferentes países adotam diferentes convenções a respeito da composição das taxas e a respeito da contagem de tempo. As mais comuns são as seguintes:

Nos Estados Unidos a taxa de composição é semestral e utiliza-se o *day count* considerando-se 365 dias corridos, do seguinte modo:

$$B(0,T) = \left(1 + \frac{Y(0,T)}{2}\right)^{-2\frac{dias\ corridos}{365}}$$

Na Inglaterra a composição é anual e utiliza-se o *day count* considerando-se 360 dias corridos, do seguinte modo:

$$B(0,T) = (1 + Y(0,T))^{-\frac{dias\ corridos}{360}}$$

No Brasil, a composição é anual e utiliza-se o *day count* considerando-se 252 dias úteis, do seguinte modo:

$$B(0,T) = (1 + Y(0,T))^{-\frac{dias\ úteis}{252}}$$

Genericamente, podemos considerar uma composição da taxa em n vezes[1] ao ano. Abusando um pouco da notação, considerando que o *day count* for dado por T, então vale a seguinte fórmula:

$$B(0,T) = \left(1 + \frac{Y(0,T)}{n}\right)^{-nT}$$

Suponha que sejam aplicados $R\$1.000,00$ em um banco que remunera a $5\% a.a..$ e a composição é anual Assim, após um ano, você terá $R\$1.000,00 * (1+0,05) = R\$1.050,00$. Suponha, agora, que o banco lhe pague $5\%a.a.$ mas a composição é semestral, o que implica que ao final de um ano você terá $R\$1.000,00 * (1 + \frac{0,05}{2})^2 = R\$1.050,63$

À medida em que o número de períodos de composição da taxa cresce, o montante total também irá crescer, porém a taxas cada vez menores, convergindo rapidamente para a fórmula abaixo:

$$B(0,T) = e^{-Y(0,T)T}$$

O que nos sugere a seguinte proposição:

Proposição 1 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{Y(0,T)}{n}\right)^{-nT} = e^{-Y(0,T)T}$

Prova. Omitida ■

A principal vantagem em se trabalhar com taxas que são compostas continuamente reside na facilidade de se calcularem taxas de retorno. A taxa de retorno com *day count* T é dada por:

$$r = -\frac{1}{T}\ln\left(\frac{VF}{C_0}\right)$$

Suponha, por exemplo, que um montante de $R\$1.000,00$ investidos com capitalização contínua por um ano e nove meses resulte em um total de $R\$1.500,00$. A taxa de retorno anualizada será $r = -\frac{1}{1,75}\ln\left(\frac{1.500}{1.000}\right) = 23,1694\%$.

[1] I.e., $n = 1$ representa a composição anual, $n = 2$ representa a composição semestral, $n = 3$ representa a composição quadrimestral, e assim por diante.

1.5 O Preço de um Bond com Cupons

O preço de um bond de T anos que paga cupon semestral de $x\%a.a.$[2] é dado por:

$$P = \sum_{t=0,5}^{T-1} \frac{x\%}{2} B(0,t) + (1 + \frac{x\%}{2}) B(0,T)$$

Como exemplo, seja um bond de 10 anos com cupons de $6\%a.a.$. Qual é o preço desse bond com cupons?

Supondo que as taxas são dadas de forma composta bianualmente, teremos:

$$P = 0.03(1+Y(0,0.5)/2)^{(-2\cdot 0.5)} + 0.03(1+Y(0,0.5)/2)^{(-2\cdot 1.0)} + \cdots + 1.03(1+Y(0,0.5)/2)^{(-2\cdot T)}$$

1.6 Estrutura à Termo das Taxas de Juros

A fórmula anterior deixa claro que o cálculo do preço de qualquer série de pagamentos é feita interpretando o fluxo de caixa associado como um portfolio de pagamentos unitários. Dessa forma, a posse das curvas $Y(0,T)$ ou $B(0,T)$ resolve completamente o problema de precificação.

Definição 1 *$Y(0,T)$ ou $B(0,T)$, $T > 0$, é chamado de estrutura a termo das taxas de juros.*

1.7 Yield to Maturity (Taxa Interna de Retorno) de um Bond

A *Yield to Maturity* de um *bond* é a taxa de retorno composta YTM que torna o VPL igual a zero.

Se considerarmos um título que paga uma série de pagamentos C_t nas datas t´s, então a *yield to maturity* composta em n vezes é determinada pela pela fórmula abaixo:

$$P - \sum_{t=1}^{T} C_t \left(1 + \frac{YTM}{n}\right)^{-nt} = 0$$

enquanto que se a composição for contínua a fórmula será dada por:

$$P - \sum_{t=1}^{T} C_t e^{-YTMt} = 0$$

[2] A cada semestre paga-se metade do cupon.

1.8 O Algoritmo de Newton-Rapson

Existem procedimentos numéricos que, através de aproximações sucessivas, permitem aproximar problemas complicados em problemas mais simples, fáceis de calcular, dentre os quais, destacadamente o algoritmo de Newton-Rapson.

Seja uma função $g : X \to \mathbb{R}$ cuja forma é desconhecida e considere o problema de encontrar um zero desta função (i.e. $x^* \in X$ tal que $g(x^*) = 0$). O algoritmo de Newton Rapson permite calcular x^* através de aproximações lineares sucessivas partindo-se de um $x_0 \in X$ do seguinte modo:

1^o passo: escolho, arbitrariamente, um $x_0 \in X$

2^o passo: defino uma função $f : X \to \mathbb{R}$ como sendo igual a uma aproximação de Taylor de 1^o ordem da função $g(x)$ em torno do ponto x_0

$$f(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0)$$

3^o passo: Determino uma primeira aproximação do valor de x^*, como sendo o zero da função $f(x)$ definida anteriormente (sem perda de generalidade chamaremos de x_1 esta primeira aproximação):

$$\begin{aligned} f(x_1) = 0 \Rightarrow g(x_0) + g'(x_0)(x_1 - x_0) = 0 \\ \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)} \end{aligned}$$

4^o passo: Verifico se $x_1 = x^*$. Em caso afirmativo o problema está resolvido, em caso negativo repete os passos 1 à 4 (substituindo x_1 por x_0 e assim por diante) até encontrar x^*.

1.8.1 Aplicando o Algoritmo de Newton Rapson para a Determinação da Yield to Maturity de um Título

Seja um título que custa C_0 e que pague $C_t \geq 0$ $t = 1, \cdots T - 1$ e $C_T > 0$.

A função valor atual é definida como se segue:

$$V(r) = \sum_{t=0}^{T} C_t (1 + r)^{-t}$$

Notemos, inicialmente:

$$
\begin{aligned}
\lim_{r \to -1^+} V(r) &= \lim_{r \to -1^+} \sum_{t=0}^{T} C_t (1+r)^{-t} = \\
&= \lim_{r \to -1^+} \left(C_0 + C_1(1+r)^{-1} + C_2(1+r)^{-2} + \cdots + C_T(1+r)^{-T} \right) = \infty
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\lim_{r \to \infty} V(r) &= \lim_{r \to \infty} \sum_{t=0}^{T} C_t (1+r)^{-t} = \\
&= \lim_{r \to \infty} \left(C_0 + C_1(1+r)^{-1} + C_2(1+r)^{-2} + \cdots + C_T(1+r)^{-T} \right) = C_0 < 0
\end{aligned}
$$

Da continuidade de $V(r)$ segue-se que existe $r^* > -1$ tal que $V(r^*) = 0$, i.e., existe um "*yield to maturity*". Se $\frac{\partial V(r)}{\partial r} < 0$ então asseguramos a unicidade da unicidade da "*yield to maturity*".

$$
\frac{\partial V(r)}{\partial r} = -\sum_{t=0}^{T} t C_t (1+r)^{-t-1} < 0
$$

Para aplicar o algoritmo de Newton Rapson, consideremos $r_0 = 0$. A primeira aproximação do valor r^* será, então:

$$
W(r_1) = V(0) + V'(0)(r_1 - 0)
$$

Sendo r_1^* tal que $W(r_1^*) = 0$, segue-se que:

$$
\begin{aligned}
r_1^* &= -\frac{V(0)}{V'(0)} = \\
&= -\frac{\left(-\sum_{t=0}^{T} C_t \right)}{\left(\sum_{t=1}^{T} t C_t \right)}
\end{aligned}
$$

Genericamente:

$$
r_{k+1}^* = r_k^* - \frac{V(r_k^*)}{V'(r_k^*)}
$$

1.9 *Duration* (Duração)

Duration pode ser entendida como sendo uma medida *standard* de risco para renda fixa.

1.9.1 *Duration* para um *zero cupon bond*

Vamos examinar inicialmente o conceito de *duration* para um *zero cupon bond*.

Duration de um *zero coupon bond*, considerando-se taxas compostas anualmente:

(a) Maturidade de um ano. Taxa cai de 5% para 4%.

$$5\% \rightarrow B(0,1) = \frac{1}{1.05} = .9524$$

$$4\% \rightarrow B(0,1) = \frac{1}{1.04} = .9615$$

$$\frac{B_{5\%}(0,1) - B_{4\%}(0,1)}{B_{5\%}(0,1)} = 0.0095 \approx 1\%$$

(b) Maturidade de 10 anos. Taxa cai de 5% para 4%.

$$5\% \rightarrow B(0,10) = \frac{1}{1.05^{10}} = .6139$$

$$4\% \rightarrow B(0,10) = \frac{1}{1.04^{10}} = .6756$$

$$\frac{B_{5\%}(0,10) - B_{4\%}(0,10)}{B_{5\%}(0,10)} = 0.1005 \approx 10\%$$

Matematicamente:

$$B(0,T) = \frac{1}{(1+R)^T}$$

$$\frac{dB(0,T)}{d(1+R)} = -\frac{T}{(1+R)^{T+1}} = -\frac{T\ B(0,T)}{(1+R)}$$

$$\frac{\frac{dB(0,T)}{B(0,T)}}{\frac{d(1+R)}{(1+R)}} = -T$$

$$D = \left| \frac{\frac{dB(0,T)}{B(0,T)}}{\frac{d(1+R)}{(1+R)}} \right| = T$$

A conclusão que podemos obter é a de que a *Duration* de um *zero cupon bond* é igual a sua maturidade. Nos exemplos não achamos exatamente $D = T$ porque nós adicionamos 1% à R ao invés de aumentar $(1 + R)$ em 1%.

Se adicionarmos 1% à R , a medida relevante é a *modified duration.*

$$D_M = \frac{1}{B}\frac{dB}{dR}\frac{D}{(1+R)}$$

1.9.2 *Duration* para *coupon bonds*

Considere um bond de 10%, maturidade em 2 anos, $P = 103.9163$ e $YTM = 8\%$.

$$P = \frac{5}{(1+R)^{0.5}} + \frac{5}{(1+R)^{1}} + \frac{5}{(1+R)^{1.5}} + \frac{105}{(1+R)^{2}}$$

Qual a mudança de preço por dolar investido se $(1 + R)$ aumentar em 1%?

Note que podemos tratar esse bond como um portfólio de zero coupon bonds. A mudança de valor do primeiro coupon será de 0.5%, a do segundo de 1%, etc.

Basta ponderarmos cada coupon pelo seu valor relativo dentro do portfólio. A proporção do primeiro coupon no valor total do portfólio é:

$$\frac{\frac{5}{(1+R)^{0.5}}}{P} = 0.0463$$

Quer dizer, a mudança de valor por dolar investido, devido ao coupon é:

$$\frac{\frac{5}{(1+R)^{0.5}}}{P}\frac{1}{2} = 0.02315$$

Isto nos da a fórmula de *Macaulay*:

$$D = \sum_{\tau} \frac{\frac{C_\tau}{(1+R)^\tau}}{P} \cdot \tau$$

O que nos sugere que a *duration* de um *portfólio* é uma média ponderada das *durations* dos ativos.

$$D^P = \frac{D^A V^A + D^B V^B}{V^A + V^B}$$

1.10 Propriedades da duration:

1. Duration de um zero coupon bond é igual a sua maturidade.
2. Duration de um coupon bond é sempre menor que a sua maturidade.
3. Para bons com a mesma maturidade T, quanto maior o coupon, menor é a duration.

Duration é uma medida da sensibilidade do preço de um título em relação à mudanças na taxa de juros no qual o título é descontado. É largamente utilizado como uma medida de risco para títulos (i.e., quanto maior a *duration* de um título, mais arriscado ele será). A medida de *duration* básica é a "*Macaulay Duration*" que é definida para o caso em que a estrutura a estrutura a termo é "*flat*"[3]

Seja um título com pagamentos C_t, $t = 1, \cdots T$, onde os primeiros $T-1$ pagamentos correspondem aos pagamentos de juros (cupons) e o T-ésimo pagamento corresponde à soma do re-pagamento do principal e o último pagamento de juros. Se a estrutura a termo é "*flat*" então sabemos que o valor presente do fluxo de pagamentos do título será definido por:

$$P = \sum_{t=1}^{T} C_t(1+r)^{-t}$$

A medida *Macaulay Duration*[4] (que, doravante chamaremos, simplesmente, de *duration*) é definida como segue:

$$D = \frac{1}{P}\sum_{t=1}^{T} tC_t(1+r)^{-t}$$

Como um exemplo, consideremos dois títulos. O título A recém adquirido e possui um valor de face de $R\$1.000,00$, pagando juros (ao final de cada ano) à uma taxa de mercado de $7\%a.a.$ e irá maturar em 10 anos (o que implica em um preço de mercado do título A igual ao seu valor de face). O título B foi adquirido 5 anos atrás, quando a taxa de juros era mais elevada. Esse título tem o valor de face de $R\$1.000,00$ e paga uma taxa de juros de $13\%a.a.$. Quando adquirido tinha 15 anos de maturidade, desse modo a maturidade que resta é de 10 anos. Dado que a taxa de juros de mercado corrente é de $7\%a.a.$, o preço de mercado do título B é dado por:

$$\begin{aligned} P_B &= \sum_{t=1}^{9} \$130,00(1,07)^{-t} + \$1.130,00(1,07)^{-10} = \\ &= R\$\ 1.421,41 \end{aligned}$$

[3] Seja r_t a taxa de desconto para o pagamento do título no período t. Diz-se que a estrutura a termo é "*flat*" quando $r_t = r$ (constante) para todo t.

[4] Veremos mais adiante que esta medida corresponde ao valor absoluto da elasticidade-preço do título em relação à sua taxa de desconto.

A *duration* de cada um dos títulos será de 7,5152 e 6,7535, respectivamente, para o título A e para o título B. Como se poderia esperar, a *duration* do título A é maior do que a do título B. Para olhar esta relação de outro modo, note que o valor presente líquido do primeiro ano de pagamento do título A ($R\$70,00$) representa $6,54\%$ do preço do título, enquanto que o valor presente líquido do primeiro ano de pagamento do título B ($R\$130,00$) é de $8,55\%$ de seu preço. Se considerarmos os pagamentos do segundo ano estes percentuais passam, respectivamente, para $6,11\%$ e $7,99\%$.

Outra medida de *duration* muito utilizada (especialmente para se calcular a volatilidade no preço de um título) é definida como:

$$D' = \frac{D}{(1+r)}$$

1.11 Qual é o significado de *Duration*?

Examinaremos, a seguir, três interpretações distintas de *duration*, cada uma das quais importante à seu modo.

1.11.1 *Duration* como uma média ponderada dos pagamentos dos títulos

Como foi originalmente definido por *Macaulay* (1838), duration é uma média ponderada dos pagamentos do título. Reescrevendo a fórmula de duração, temos que:

$$D = \sum_{t=1}^{T} \left[\left(\frac{C_t}{P} \right) (1+r)^{-t} \right] t$$

Note que o termo entre cochetes $\left[\left(\frac{C_t}{P}\right)(1+r)^{-t}\right]$ soma um (para checar isto, substitua a fórmula de P e aplique o somatório). Isto segue da definição de preço de um título, cada um destes termos é proporcional ao preço do título representado pelo pagamento na data t. Na fórmula de *duration* cada um dos termos $\left[\left(\frac{C_t}{P}\right)(1+r)^{-t}\right]$ é multiplicado pela sua ocorrência. Desse modo, a *duration* pode ser interpretada como sendo a média ponderada pelo tempo dos pagamentos descontados do título como uma proporção do preço do título.

1.11.2 *Duration* como elasticidade-preço do título em relação à sua taxa de desconto

A interpretação da *duration* como sendo a elasticidade preço de um título em relação à sua taxa de desconto explica porque a medida de duração pode ser usada para medir a volatilidade do preço do título; também mostra porque a *duration* é frequentemente usada como uma medida de risco para os títulos.

Para derivar esta interpretação, tomaremos a derivada do preço do título em relação a taxa de juros corrente:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\sum_{t=1}^{T} tC_t(1+r)^{-t-1}$$

Usando a definição de *duration*, teremos:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{DP}{(1+r)}$$

ou, usando a definição alternativa de *duration*, D':

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -D'P$$

Duas interpretações possíveis:

Primeiro, *duration* pode ser entendida como a elasticidade do fator de desconto do preço do título, onde por "*fator de desconto*" estamos nos referindo à $(1+r)$:

$$\frac{\frac{\partial P}{p}}{\frac{\partial r}{(1+r)}} = -D$$

Segundo, podemos usar *duration* para medir a volatilidade do preço de um título, reescrevendo a última fórmula como:

$$\frac{\partial P}{P} = -D\frac{\partial r}{(1+r)}$$

Voltando aos exemplo anterior, suponha que a taxa de juros de mercado cresça 10%, passando de 7% para 7, 7%. O que irá acontecer com o preço dos títulos?

De acordo com a fórmula da elasticidade-preço, as mudanças nos preços dos títulos são aproximadas por:

$$\Delta P \simeq -DP\frac{\Delta r}{(1+r)}$$

Substituindo os valores, podemos verificar que, de acordo com esta fórmula aproximada, a variação do preço dos títulos serão $-R\$49,17$ e $-R\$62,80$, respectivamente, para o títulos A e para o título B. Note que se utilizássemos as fórmulas de apreçamento dos títulos, considerando a taxa de juros de $7,7\% a.a.$, teremos que os preços dos títulos serão $R\$952,39$ e $R\$1.360,50$, respectivamente, para os títulos A e B (ou, equivalentemente, as variações nos preços dos títulos serão, respectivamente, $-R\$47,61$ e $-R\$60,92$).

1.12 Limitações da *Duration*

Problemas com o duration: Pequenas vs. grandes mudanças na taxa de juros.

Exemplo: Bond de 20 anos, coupon anual de 10%, valor de face de $100. Yield curve constante em 8%. *Duration* de 9.36 anos, *modified duration* de 8.51 anos.

1. *yield curve* muda em *1 basis point* para 10.01%.
    - Cálculo direto: preço passa de $100 para $99.91, uma queda de -0.085%.
    - Cálculo por *duration*: mudança percentual é dada por: $-D_m \times 0.01\% = -0.0851\%$.
2. *yield curve* muda em *200 basis point* para 12%.
    - Cálculo direto: preço passa de $100 para $85.06, uma queda de -14.94%.
    - Cálculo por *duration*: mudança percentual é dada por:$-D_m \times 2.0\% = -17.03\%$

Conclusão: *Duration* é uma aproximação de primeira ordem, para pequenos movimentos na *yield curve*.

$$\frac{B(R+\varepsilon)-B(R)}{B(R)} = \underbrace{\frac{B'(R)}{B(R)}}_{=-D_M}\varepsilon + o(\varepsilon)$$

Onde $o(\varepsilon)$ refere-se a termos menores que ε.

A aproximação funciona bem enquanto ε for pequeno. Como podemos melhorar isso ? Aproximação de segunda ordem.

Convexity:

$$\frac{B(R+\epsilon)-B(R)}{B(R)} = \underbrace{\frac{B'(R)}{B(R)}}_{=-D_M}\epsilon + + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{B''(R)}{B(R)}}_{=C_M}\epsilon^2 + o(\epsilon^2)$$

$$C_M \equiv \frac{1}{2}\frac{d^2B}{dB^2}$$

Para um *zero coupon bond* de maturidade T:

$$B = \frac{1}{(1+R)^T}$$

$$\frac{d^2B}{dB^2} = T(T+1)\frac{1}{(1+R)^{T-2}}$$
$$= \frac{T(T-1)}{(1+R)^2}B$$

$$C_M = \frac{1}{2}\frac{T(T+1)}{(1+R)^2}$$

Para um *coupon bond*:

$$C_M = \frac{1}{2B}\sum_{\tau}\frac{C_\tau}{(1+R)^{\tau+2}}\tau(\tau+1)$$

Retornando ao exemplo: Bond de 20 anos, coupon anual de 10%, valor de face de \$100. Yield curve constante em 8%. *Duration* de 9.36 anos, *modified duration* de 8.51 anos, *convexity* de 58.11.

Yield curve muda em *200 basis point* para 12%.

- Cálculo direto: preço passa de \$100 para \$85.06, uma queda de -14.94%.
- Cálculo por *duration*: mudança percentual é dada por:$-D_m \times 2.0\% = -17.03\%$
- Cálculo por *duration* e *convexity*: mudança percentual é dada por: $-D_m \times 2.0\% = -17.03\%$ mais o ajuste de covexidade: $58.11 \times (2.0\%)^2 = 2.32\%$. O ajuste total fica: $-D_M \times 2\% + C_M \times (2\%)^2 = 14.71\%$.

Suponha que a mudança na taxa de juros seja aleatória: $R \rightarrow R+\varepsilon$ onde $\varepsilon \sim N(0,1)\%$. Qual a variação esperada no preço do bond ?

$$= 0 + 58.11 \times 1\% = .58$$

Duration corta dos dois lados, enquanto que *convexity* é sempre benéfica.

Matematicamente o que está por detrás destes argumentos é a *desigualdade de Jensen*:

Se $f(x)$ é uma função convexa:

$$E[f(x)] \geq f(E[x])$$

$$B(R) = \frac{1}{(1+R)^T}$$

$$B'(R) = \frac{-T}{(1+R)^{T+1}} \leq 0$$

$$B''(R) = \frac{T(T+1)}{(1+R)^{T+2}} \geq 0$$

$B(R)$ é decrescente e convexa.

Exemplo: Suponha que a taxa seja 5% hoje. A partir de amanhã ela será ou 6% ou 4% com probabilidades iguais. Qual a forma da *yield curve* hoje ? *Flat*?

$$E\left[\frac{B(R+\varepsilon)-B(R)}{B(R)}\right] = -D_M E[\varepsilon] + C_M E[\varepsilon^2]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{T(T+1)}{(1+R)^2} \times 1\%$$

Portanto, quanto mais longo for o *bond*, maior o retorno esperado devido à *convexity*. Nesse ambiente *bonds* mais longos possuem desvantagens de *yield* para anular a vantagem da *convexity*.

2 Taxas *Forward*

A taxa *forward* é a taxa de um de empréstimo de dinheiro entre duas datas futuras. Tanto as datas como o valor das taxa de juros do empréstimo é contratada hoje. Ou seja ambas as partes concordam no seguinte fluxo de caixa.

- Hoje: 0
- Data T_1 : $-R\$1$
- Data T_2 : $+R\$x$

É claro que essa operação física de transformação de um real em x reais entre as datas T_1 e T_2 pode ser representada por uma taxa de juros denotada $F(0, t_1, T_2)$.

Se adotarmos a convenção de composição contínua temos:

$$x = e^{F(0,T_1,T_2)(T_2-T_1)}$$

Se usarmos uma composição por n períodos

$$x = (1 + F(0, T_1, T_2)/n)^{n(T_2-T_1)}$$

De qualquer forma, existe na $ETTJ$ vigente um valor justo para x. Ele pode ser calculado por um argumento de não arbitragem estático, sendo independente do modelo estatístico usado para a estrutura à termo. Na convenção continuamente composta, parece claro que deve valer a seguinte relação:

$$e^{Y(0,T_1)T_1}e^{F(0,T_1,T_2)(T_2-T_1)} = e^{Y(0,T_2)T_2}$$

onde $Y(0, T)$ é a ETTJ corrente.

Ambos os lados refletem maneiras distintas de investir entre as datas 0 (hoje) e T_2. Tomando-se logarítimos dos dois lados e rearranjando, obtemos:

$$F(0, T_1, T_2) = \frac{e^{Y(0,T_2)T_2} - e^{Y(0,T_1)T_1}}{(T_2 - T_1)}$$

A demonstração desse resultado segue a forma padrão. Suponha que não valha, por exemplo suponha que

$$x < e^{F(0,T_1,T_2)(T_2-T_1)}$$

ou seja, parece ser mais vantajoso operar a estrutura de taxa travada que comprar o bond maturando em T_2.

Construa então a seguinte operação: hoje vendo $R\$M$ do *bond* maturando em T_2, compro $R\$M$ do *bond* maturando em T_1 e contrato uma aplicação *forward* no valor de $R\$Me^{Y(0,T_1)T_1}$ entre as datas T_1 e T_2. Esse contrato faz juz ao seguinte fluxo de caixa:

- Hoje: $M - M = 0$.
- Em T_1: Resgato o bond maturando nessa data e dou o valor $R\$Me^{Y(0,T_1)T_1}$ a emprestimo à taxa contratada. O líquido desse fluxo é zero.
- Pago o *bond* vendido na data zero, no montante de $R\$Me^{Y(0,T_2)T_2}$ e obtenho o resgate do empréstimo no valor de $R\$Me^{Y(0,T_1)T_1}e^{F(0,T_1,T_2)(T_2-T_1)}$

Nesse caso obtivemos um fluxo de caixa positivo em T_2 com probabilidade 1 e um fluxo igual à zero nos demais períodos. Como M é arbitrário, ficaríamos infinitamente ricos.

Finalmente, precisamos provar também que não pode valer a condição contrária

$$x > e^{F(0,T_1,T_2)(T_2-T_1)}$$

Nesse caso, o mesmo argumento é usado invertendo-se as posições compradas e vendidas.

Como as taxas *forward* devem ser não negativas

$$F(0,T_1,T_2) = \frac{e^{Y(0,T_2)T_2} - e^{Y(0,T_1)T_1}}{(T_2 - T_1)} \geq 0$$

então $Y(0,T)T$ deve ser uma curva não decrescente.

Visto de outra forma, $Y(0,T)$ não pode ser decrescente demais. Como sabemos, uma curva diferenciável, não decrescente, possui derivada não negativa.

$$F(0,T_1,T_1+\delta) = \frac{e^{Y(0,T_1+\delta)(T_1+\delta)} - e^{Y(0,T_1)T_1}}{\delta}$$

Tomando o limite, definimos a taxa *forward* instantânea no tempo T_1

$$f(0,T_1) = \frac{dY(0,T)T}{dT}$$

avaliada em $T = T_1$.

3 Títulos Indexados

No mercado brasileiro, assim como em outros países é comum a negociação de títulos cujo valor de face é corrigido segundo algum indexador. Nos EUA's existem os TIPS, ligados ao CPI. No Brasil, negocia-se títulos indexados ao dolar a à inflação.

Esses títulos, se forem *zero cupons*, pagarão o nocional corrigido na maturidade. Se for um *cupon bond*, o percentual definido no cupon será aplicado ao nocional corrigido.

Mecanicamente, esses títulos são analisados da mesma forma que títulos sem indexação. Basta trabalhar com o nocional corrigido desde à emissão até a data de negociação. A única característica perdida é a garantia de que as taxas de juros dos títulos sejam positivas, uma vez que em geral não se pode comprar o indexador.

Exemplo: Considere uma NTNC, indexada ao IGPM, emitida em 01/02/2003, com vencimento em 01/02/2005. Originalmente esse papel possuia um valor de face igual a $R\$1000,00$. Hoje, computando-se a inflação acumulada no período, o nocional é de $R\$1.105,00$. Se o preço de negociação de mercado for de $R\$1.180,00$, a taxa de juros é de 1180/1105.

Com base nesses títulos, podemos ter uma estimativa do crescimento esperado do indexador. Basta usar o fato que há alternativas de investimento, e que essas alternativas devem gerar aproximadamente o mesmo valor.

$$e^{Y(0,T)T} \sim e^{X(0,T)T} E[\Delta(\text{index})]$$

onde Y é a curva zero, X a curva de juros do título indexado e $E[\Delta(\text{index})]$ o valor esperado da mudança do indexador entre hoje e T.

4 *Floats*

Títulos indexados, tem seu valor corrigido por algum indexador exógeno à *yield curve*. Títulos flutuantes tem seu fluxo de caixa ajuastado pelo comportamento futuro das próprias taxas de juros. Há varias modalidades de títulos flutuantes.

Analisaremos primeiro o caso de uma *plain vanilla swap* no estilo europeu. Nesse contrato, uma parte paga periodicamente uma taxa de juros fixas sobre um valor nocional, enquanto recebe uma taxa de juros flutuante sobre esse mesmo nocional.

Rentabilidade fixa:

$$C_i = NX_\tau$$

onde:

N é o nocional;
X a taxa do swap; e
τ o período.

Em geral, X é denotado como uma taxa anual e τ é uma fração do ano (0.5 ou 0.25). Temos $t_{i+1} - t_i = \tau$ e o cupon C_i é pago no final do período, em t_{i+1}.

O valor presente desse pagamento é dado por

$$PV(C_i) = NX\tau B(0, t_{i+1})$$

Rentabilidade flutuante:

$$A_i = N_\tau R_i$$

onde:

R_i é a taxa correspondente ao período (semestral ou trimestral):

$$R_i = Y(t_i, t_{i+1})$$

O valor presente desse pagamento é dado por

$$PV(A_i) = E[N_\tau R_i B(0, t_{i+1})$$

No contrato de *swap*, não há troca de dinheiro no período zero. Consideraremos primeiro o caso onde há um único pagamento a ser efetuado no futuro. Nesse caso a taxa justa X da ponta prefixada é determinado de forma à fazer os dois valores presentes iguais.

$$PV(C_i) = PV(A_i)$$

Para determinar esse valor, considere a seguinte estratégia:

Compre um *bond* maturando em t_i e venda um *bond* maturando em t_{i+1}. Em t_i esse *portfolio* valerá

$$V(t_i) = B(t_i, t_i) - B(t_i, t_{i+1}) = 1 - B(t_i, t_{i+1})$$

Considerando taxas compostas uma vez por período temos

$$V(t_i) = 1 - \frac{1}{1 + R_i\tau_i} = \frac{R_i\tau_i}{1 + R_i\tau_i}$$

Por outro lado, a pessoa que pagará a parte flutuante terá uma obrigação em t_i igual à

$$\frac{R_i\tau_i}{1 + 1 + R_i\tau_i}$$

Ou seja, em t_i a estratégia e a parte flutuante tem o mesmo valor. Logo, elas devem ter o mesmo preço em t_0.

$$B(0,t_i) - B(0,t_{i+1}) = X\tau B(0,t_{i+1})$$

Logo:

$$X = \frac{\frac{B(0,t_i)}{B(0,t_{i+1})} - 1}{\tau}$$

Note que

$$e^{-Y(0,t_i)t_i} e^{-F(0,t_i,t_{i+1})\tau} = e^{-Y(0,y_{i+1})t_{i+1}}$$

$$e^{-F(0,t_i,t_{i+1})\tau} = \frac{B(0,t_{i+1})}{B(0,t_i)}$$

$$F(0,t_i,t_{i+1})\tau = \ln(\frac{B(0,t_i)}{B(0,t_{i+1})}) \sim \frac{B(0,t_i)}{B(0,t_{i+1})} - 1$$

$$X \sim F(0,t_i,t_{i+1})$$

5 DI Futuro

O mercado futuro de taxas de juros no Brasil é um mercado para contratos futuros de taxa média de depositos interfinanceiros de um dia, conhecido como o mercado de DI-Futuro.

Considere, inicialmente, que existe um *zero cupon bond*, cujo vencimento ocorre no primeiro dia útil do mes. Desse modo, o *zero cupon bond* é definido pelo seu valor de face e pela data do seu vencimento. Suponha que este *zero cupon bond* possa ser negociado diariamente, sendo que o seu preço de fechamento diario corresponde, na realidade, a média da última meia hora de pregão, o que equivale a observar que se alguem comprar ou vender esse *zero cupon bond* em um determinado dia ao mesmo preço que o preço de fechamento então não havera a geração de qualquer fluxo de caixa. Por outro lado, se o preco for diferente do preço de fechamento então havera um ajuste igual a essa diferença, que ocorrera em $t + 1$.

Uma posição comprada ou vendida sera ajustada diariamente. Tal ajuste se da tomando-se a diferença do preço de fechamento do dia menos o preço de fechamento da véspera capitalizado pela taxa média diaria de deposito interfinanceiro de um dia da CETIP.

5.1 Especificações do Contrato Futuro de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia (BM&F)

5.1.1 Definições

Preço unitário (PU): o valor, em pontos, correspondente a 100.000, descontado pela taxa de juro descrita no item 2.

Taxa de DI: Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia (DI) calculada pela Central de Custódia e de Liquidação Financeira de Títulos (Cetip), expressa em taxa efetiva anual, base 252 dias úteis.

Preço de ajuste (PA): preço de fechamento, expresso em PU, apurado e/ou arbitrado diariamente pela BM&F, a seu critério, para cada um dos vencimentos autorizados, para efeito de atualização do valor das posições em aberto e apuração do valor de ajustes diários e de liquidação das operações day trade.

Saques-reserva: dia útil para fins de operações praticadas no mercado financeiro, conforme estabelecido pelo Conselho Monetário Nacional.

5.1.2 Objeto de negociação

A taxa de juro efetiva até o vencimento do contrato, definida para esse efeito pela acumulação das taxas diárias de DI no período compreendido entre a data de negociação, inclusive, e o último dia de negociação do contrato, inclusive.

5.1.3 Cotação

Taxa de juro efetiva anual, base 252 dias úteis, com até três casas decimais.

5.1.4 Variação mínima de apregoação

0,001 ponto de taxa.

5.1.5 Oscilação máxima diária

Conforme estabelecida pela BM&F.

5.1.6 Unidade de negociação (tamanho do contrato)

PU multiplicado pelo valor em reais de cada ponto, estabelecido pela BM&F.

5.1.7 Meses de vencimento

Os quatro primeiros meses subseqüentes ao mês em que a operação for realizada e, a partir daí, os meses que se caracterizarem como de início de trimestre.

5.1.8 Número de vencimentos em aberto

Conforme autorização da BM&F.

5.1.9 Data de vencimento

Primeiro dia útil do mês de vencimento.

5.1.10 Último dia de negociação

Dia útil anterior à data de vencimento.

5.1.11 Day trade

São admitidas operações day trade (compra e venda, no mesmo dia, da mesma quantidade de contratos para a mesma data de vencimento), que serão compensadas, desde que realizadas em nome do mesmo cliente, intermediadas pela mesma Corretora de Mercadorias e registradas pelo mesmo Membro de Compensação ou realizadas pelo mesmo Operador Especial e registradas pelo mesmo Membro de Compensação. A liquidação financeira dessas operações será realizada no dia útil subseqüente, sendo os valores apurados de acordo com o subitem 12(b.1).

5.1.12 Ajuste diário

Para efeito de apuração do valor relativo ao ajuste diário das posições em aberto, serão obedecidos os critérios a seguir.

a) Inversão da natureza das posições

As operações de compra e de venda, originalmente contratadas em taxa, serão transformadas em operações de venda e de compra, respectivamente, em PU.

b) Apuração do ajuste diário

As posições em aberto ao final de cada pregão, depois de transformadas em PU, serão ajustadas com base no preço de ajuste do dia, estabelecido conforme regras da Bolsa, com movimentação financeira (pagamento dos débitos e recebimento dos ganhos) no dia útil subseqüente (D+1).

O ajuste diário será calculado até a data de vencimento, inclusive, de acordo com as seguintes fórmulas:

b.1) ajuste das operações realizadas no dia

$$AD_t = (PA_t - PO) \times M \times N$$

b.2) ajuste das posições em aberto no dia anterior

$$AD_t = [PA_t - (PA_{t-1} \times FC_t)] \times M \times N$$

onde:

AD_t = valor do ajuste diário, em reais, referente à data "t";
PA_t =preço de ajuste do contrato na data "t", para o vencimento respectivo;
PO = preço da operação, em PU, calculado da seguinte forma, após o fechamento do negócio:

$$PO = \frac{100.000}{(1 + \frac{i}{100})^{\frac{n}{252}}}$$

onde:

i = taxa de juro negociada;
n = número de saques-reserva, compreendido entre a data de negociação, inclusive, e a data de vencimento do contrato, exclusive;

M = valor em reais de cada ponto de PU, estabelecido pela BM&F;
N = número de contratos;
PA_{t-1} = preço de ajuste do contrato na data "t–1", para o vencimento respectivo;
FC_t = fator de correção do dia "t", definido pelas seguintes fórmulas:

i) quando houver um saque-reserva entre o último pregão e o dia do ajuste

$$FC_t = (1 + \frac{DI_{t-1}}{100})^{\frac{1}{252}}$$

ii) quando houver mais de um saque-reserva entre o último pregão e o dia do ajuste

$$FC_j = \prod_{j=1}^{n}(1 + \frac{DI_j}{100})^{\frac{1}{252}}$$

onde:

DI_{t-1} = taxa de DI, referente ao dia útil anterior ao dia a que o ajuste se refere, com até seis casas decimais. Na hipótese de haver mais de uma taxa de DI divulgada para o intervalo entre dois pregões consecutivos, essa taxa representará a acumulação de todas as taxas divulgadas.

Na data de vencimento do contrato, o preço de ajuste será 100.000.

Se, em determinado dia, a taxa de DI divulgada pela Cetip se referir a um período (número de dias) distinto daquele a ser considerado na correção do preço de ajuste, a BM&F poderá arbitrar uma taxa, a seu critério, para aquele dia específico.

O valor do ajuste diário (AD_t), se positivo, será creditado ao comprador da posição em PU (vendedor original em taxa) e debitado ao vendedor da posição em PU (comprador original em taxa). Caso o valor seja negativo, será debitado ao comprador da posição em PU e creditado ao vendedor da posição em PU.

5.1.13 Condições de liquidação no vencimento

Na data de vencimento, as posições em aberto, após o último ajuste, serão liquidadas financeiramente pela Bolsa, mediante o registro de operação de natureza inversa (compra ou venda) à da posição, na mesma quantidade de contratos, pela cotação (preço unitário) de 100.000 pontos.

Os resultados financeiros da liquidação serão movimentados no dia útil subseqüente à data de vencimento.

- **Condições especiais**

Se, por qualquer motivo, a Cetip atrasar a divulgação da taxa de DI definida no item 1 ou deixar de divulgá-la, por um ou mais dias, a BM&F poderá, a seu critério:

a) prorrogar a liquidação deste contrato, até a divulgação oficial pela Cetip; ou

b) encerrar as posições em aberto pelo último preço de ajuste disponível.

A BM&F poderá ainda, em qualquer caso, arbitrar um preço de liquidação para este contrato se, a seu critério, julgar não serem representativos tanto a taxa divulgada pela Cetip quanto o último preço de ajuste disponível.

5.1.14 Margem de garantia

Será exigida margem de garantia de todos os comitentes com posição em aberto, cujo valor será atualizado diariamente pela Bolsa, de acordo com critérios de apuração de margem para contratos futuros.

ÚLTIMA ATUALIZAÇÃO: OFÍCIO CIRCULAR 133/2001-DG, DE 13/11/2001

5.1.15 Ativos aceitos como margem

Dinheiro, ouro, cotas do Fundo dos Intermediários Financeiros (FIF) e, mediante autorização prévia da Bolsa, títulos públicos federais, títulos privados, cartas de fiança, ações e cotas de fundos fechados de investimento em ações.

5.1.16 Custos operacionais

- **Taxa operacional básica**

Operação normal: 3%; **day trade:** 1,5%.

A taxa operacional básica por contrato negociado, sujeita a valor mínimo estabelecido pela Bolsa, incide sobre a seguinte base de cálculo:

$$BC = [100.000 - (PA_{t-1} \times FC_t)] \times M$$

onde:

BC = base de cálculo.

Para os contratos liquidados financeiramente na data de vencimento, o valor da taxa operacional será idêntico ao do último dia de negociação.

- **Taxa de liquidação no vencimento**

Valor da taxa operacional básica do último dia de negociação.

- **Taxas da Bolsa (emolumentos e fundos)**

1% da taxa operacional básica. A Bolsa poderá estabelecer um vencimento que limite superiormente a base de cálculo da taxa operacional básica, para efeito de cálculo de emolumentos e fundos.

- **Taxa de registro**

Valor fixo estabelecido pela Bolsa.

Os custos operacionais são devidos no dia útil seguinte ao de realização da operação.

Os Sócios Efetivos pagarão no máximo 75% da taxa operacional básica e da taxa de liquidação no vencimento e 75% dos demais custos operacionais (taxas de registro e da Bolsa).

Os investidores institucionais pagarão 75% das taxas da Bolsa.

5.1.17 Hedgers

São considerados hedgers, para efeito deste contrato, as instituições financeiras e os investidores institucionais.

5.1.18 Normas complementares

Fazem parte integrante deste contrato, no que couber, a legislação em vigor, as normas e os procedimentos da BM&F, definidos em seus Estatutos Sociais, Regulamento de Operações e Ofícios Circulares, observadas, adicionalmente, as regras específicas das autoridades governamentais que possam afetar os termos nele contidos.

Alterações no número de saques-reserva previsto para uma série em negociação, em face do disposto na Resolução 2516, de 29 de junho de 1998, são de responsabilidade exclusiva das partes contratantes originais, ou seja, não são de responsabilidade da BM&F.

Na hipótese de situações não previstas neste contrato, bem como de medidas governamentais ou de qualquer outro fato, que impactem a formação, a maneira de apuração ou a divulgação de suas variáveis, ou que impliquem, inclusive, sua descontinuidade, a BM&F tomará as medidas que julgar necessárias, a seu critério, visando a liquidação do contrato ou sua continuidade em bases equivalentes.